GALBRAITH AND HAUGHTON'S SCIENTIFIC MANUALS.

MATHEMATICAL SERIES.

MANUAL OF

PLANE TRIGONOMETRY

BY

THE REV. JOSEPH A. GALBRAITH, M. A.

FELLOW OF TRINITY COLLEGE,

AND ERASMUS SMITH'S PROFESSOR OF NATURAL AND EXPERIMENTAL PHILOSOPHY IN THE UNIVERSITY OF DUBLIN.

BOOK NOT TO BE ISSUED

TRANSLATED INTO URDU,

BY

MUNSHI MAHAMMED ZAKA'UL LAH,

HEAD MASTER, NORMAL SCHOOL, DELHI,

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE SCIENTIFIC SOCIETIES OF ALLYGURH AND SUBA BEHAR.

گال برتھ اور ہاگھٹن صاحب کے رسالہ ہای علم ریاضی میں سے

رسالہ علم مثلث مستوی

مولفہ

جوزف اے گال برتھ صاحب ایم اے

فیلو ٹرینیٹی کالج و پروفسر نیچرل اور اکسپیریمنٹل فلاسفی

یونیورسٹی مقام ڈبلن

جسکو

منشی محمد ذکاءاللہ صاحب حیدر ماسٹر نارمل اسکول دہلی

نے

بمفاید مقاصد

سائنٹیفک سوسیٹی علیگڈھ و سائنٹیفک سوسیٹی صوبہ بہار

اردو میں ترجمہ کیا

بمقام دہلی مطبع مرتضوی میں باہتمام حاجی محمد عزیزالدین

چھپا

GALBRAITH AND HAUGHTON'S SCIENTIFIC MANUALS.

MATHEMATICAL SERIES.

MANUAL OF

PLANE TRIGONOMETRY

BY

THE REV. JOSEPH A. GALBRAITH, M. A.
FELLOW OF TRINITY COLLEGE,
AND ERASMUS SMITH'S PROFESSOR OF NATURAL
AND EXPERIMENTAL PHILOSOPHY IN THE
UNIVERSITY OF DUBLIN.

Checked
1987

TRANSLATED INTO URDU,

BY

MUNSHI MAHAMMED ZAKA-UL-LAH,
HEAD MASTER, NORMAL SCHOOL DELHI,

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE SCIENTIFIC
SOCIETIES OF ALLAHABAD AND SUBA BEHAR

گال برتھ اور ھاٹن صاحب کے رسالہ ھای علم ریاضی میں سے

رسالہ علم مثلث مستوی

مولفہ

ریورنڈ جوزف اے گال برتھ صاحب ایم اے
فلو اف ترینیٹی کالج و پروفسر نیچرل اور اسپریمنٹل فلاسفی
یونیورسٹی مقام ڈبلن

جسکو

منشی محمد ذکاءاللہ صاحب ہیڈ ماسٹر نارمل اسکول دھلی

نے

بتائید مقاصد

سین ٹیفک سوسیٹی الہ آباد و سین ٹیفک سوسیٹی صوبہ بہار

اوردو میں ترجمہ کیا

اور

بمقام دھلی مطبع مرتضوی میں باھتمام حاجی محمد عزیزالدین
کے مطبوع ھوا
سنہ ۱۸۷۱ ع

بسم اللہ الرحمن الرحیم

ایرلنڈ مین ڈبلن کی یونیورسٹی کے سارے امتحان گلبرتھ اور ہاٹن کے سلسلہ کتب ریاضیہ مین ہوتے غرض یہ سلسلہ ایرلنڈ مین سب کتب ریاضیہ پر سبقت لے گیا ہی اوس سلسلہ مین سے یہ علم مثلث مستوی کا رسالہ ہی - یہ رسالہ اس ملک کے طلبہ کے لئی نہایت مناسب ہے اونکو بہت آسانی سے علم مثلث آسکتا ہی

فہرست مضامین

دیباچہ

باب اول

زاویونکی پیمائش

(۱) تعریف زاویہ کی (۲) پیمانہ واحد زاویہ کا (۳) زاویہ کا مقیاس قوسی (۴) محیط اور قطر کی نسبت (۵) زاویۂ قائمہ کا مقیاس قوسی (۶) محیط دائرہ ثابت کی تقسیم ۱

باب دوم

علم مثلثی کے اصلے

(۱) قوس کے مثلثی جملے (۲) ارتباطات باہمی مثلثی جملون کے (۳) اتفاق جمہور علامت مثبت اور منفی کے باب مین (۴) مثلثی جملون کی قیمتون کی تحقیقات (۵) زاویہ کی مثلثی جملے (۶) مثلثی جملے (۷) ایک زاویہ مثلثی جملہ کی ارتباطات (۸) جملہائے متساویہ (۹) زاویونکی تمامی یا متمم (۱۰) زاویونکی تکملہ یا مکمل (۱۱) جداول مثلثی ۶

باب سوم

مثلث قائم الزاویہ

(۱) زاویون اور اضلاع کی درمیان ارتباطات (۲) مثلثات قائم الزاویہ کی چار صورتین
(۳) چارون صورتونکا حساب بذریعہ جداول لوکارتمی ——— ۲۷

باب چہارم
قوانین مثلثی

(۱) اشکال اصولی (۲) قوانین اربعہ (۳) قانون مجموعہ اور نقصات زاویون کی جیب اور جیب التمامون کا (۴) دوچند زاویہ کی جیب اور جیب التمام کی قیمت زاویہ کی جیب اور جیب التمام کی رقمون مین (۵) جیب اور جیب التمام زاویہ کی قیمت نصف زاویہ کی جیب اور جیب التمام مین (۶) تین زاویون کی مجموعہ کی جیب اور جیب التمام اور پیمائش کا قانون (۷) سہ چند زاویہ کی جیب اور جیب التمام اور پیمائش کا قانون ۳۵

باب پنجم
صور علم مثلثی کی تبدیل صورت

۳۴

باب ششم
مثلثات غیر قائم الزاویہ

(۱) اضلاع اور زاویون کے درمیان ارتباطات (۲) جیب التمام زاویونکی اضلاع کی رقمون مین (۳) جیب زاویونکی اضلاع کی رقمون مین (۴) نصف زاویونکی جیب و جیب التمام و مماس (۵) رقبہ مثلث کا اضلاع کی رقمونمین (۶) پانچ صورتین مثلثون کے حل کی ۴۹

باب ہفتم
بلندیان اور فاصلے

۷۴
جوابات ——— ۹۶
جدولین ——— ۱۰۲

HYDERABAD STATE LIBRARY

علم مثلث

تمہید

کبھی کسی زمانہ میں علوم ریاضیہ کی جس فرع مین مثلثون کے حل کرنے کے قاعدے بیان ہوتے تھے اونکو دراصل طرکنومٹری یعنے علم مثلث کہتے تھے مگر آجکل کے زمانہ مین علم مثلث کے معنی بہت وسعت پکڑ گئے ہین اوسمین تمام نظریات اور قوانین جنسے کہ ارتباط زاویون کے اور خاص مقادیر کے بیان ہوتے ہین داخل ہین۔ ان خاص مقادیر کو جسکی تعریف کہ زاویون کا ارتباط بیان ہوتا ہے علم مثلثی جملی کہتے ہین اور وہ زاویون پر موقوف ہوتے ہین ؛

علم ہندسہ کی استعانت سے جب تین معطیات ایسے معلوم ہوتے ہین کہ اونمین ایک دوسرے پر موقوف نہین ہوتا تو اونکے موافق مثلث ہم بنا لیا کرتے ہین ؛ اسیطرح انہین معطیات کو اعداد مین بیان کرکے ہم بذریعہ علم مثلث کے مثلث کے اضلاع اور زاویون کا حساب لگا لیتے ہین ۔

مثلث سطح مستوی اور سطح کروی پر ہم بنا سکتے ہین اسیوجہ سے یہہ دو فروع مین منقسم ہو گیا ہے ایک فرع کا نام علم مثلث مستوی ہے اور دوسری فرع کا نام علم مثلث کروی ہے اس رسالہ مین ہم علم مثلث مستوی کے قوانین اور قاعدے بیان کرین گے ؛

باب اول

۱ تعریف زاویہ کی ۲ پیمانہ واحد زاویہ کا ۳ زاویہ کا مقیاس قوسی

۴ محیط اور قطر کی نسبت ۵ زاویہ قائمہ کا مقیاس قوسی ۶ دائرہ کا ۳۶۰ حصون مین تقسیم ہونا

زاویون کے پیمانے

۱ تعریف زاویہ کی اقلیدس مین تعریف زاویہ کی یہہ لکھے ہے کہ جب دو خط مستقیم ایک نقطہ پر ملین اور ملکر ایک خط نہو جائین تو جو سلان ایک خط مستقیم کو دوسرے پر کھڑا ہوتا ہے اوسی زاویہ کہتے ہین

اب زاویہ کی مقدار کو اعداد مین بیان کرنیکے لیے ضرور ہے کہ کسی خاص زاویہ کو پیمانہ واحد مقرر کرین تاکہ اوس سے اور زاویونکا اندازہ بتلا سکین

۲ پیمانہ واحد زاویہ کا پیمانہ واحد جس سے اور سب زاویون کا اندازہ کرسکین اور پہچان سکین اوسکی تعریف یہہ ہے ؛

حد زاویہ کا پیمانہ واحد وہ زاویہ مرکزی دائرہ کا ہے جسکے سامنے کی قوس برابر نصف قطر کے ہو ؛

س کے مرکز اور کسی نصف قطر س د پر دائرہ کھینچو

اور فرض کرو کہ قوس د و طول مین برابر نصف قطر کے بنائی جائے اور نقطہ و اور مرکز مین خط ملایا جائے

زاویہ د س و = زاویہ کے پیمانہ واحد

۳ مقیاس قوسی کا زاویہ ہر ایک زاویہ مثلاً د س ب اعداد مین اس پیمانہ واحد کے موافق تعبیر ہوسکتا ہے

فرض کرو کہ آ وہ عدد ہے جو زاویہ کی قیمت کو بیان کرتا ہے اور اوسکے سامنے کی قوس د ب کا طول ق ہے اور نق نصف قطر دائرہ کا ہے تو بحکم (۳۳ ش ۴ م) کے

د س ب : د س و :: قوس د ب : قوس د و

لیکن زاویہ د س و پیمانہ واحد ہے اور د و فرضاً برابر نصف قطر کے ہے اس واسطے

د : ۱ :: آ : نق

اور اسیواسطے

آ = ق / نق

یہہ جملہ جو زاویہ کی قیمت کو بیان کرتا ہے زاویہ کا مقیاس قوسی کہلاتا ہے ؛

[illegible]

تعبیر کرتا ہے ÷

مساوات (۱) مین تین مقادیر ر و ا و ق آپسمین مربوط ہوئے ہین اوس سے معلوم ہوتا ہے کہ جب اونمین سے دو معلوم ہون تو تیسری مقدار معلوم ہو سکتی ہے

امثلۂ مشق ۱

(۱) اگر نصف قطر دائرہ کا ۳۵ فٹ ہو تو اوس زاویہ کی مقیاس قوسی کا حساب کرو جسکے محاذی قوس ۶ فیٹ طول مین ہو ÷

(۲) اگر نصف قطر ۱۲ فیٹ ۷ انچ ہو اور قوس ۵ انچ ہو زاویۂ مرکز پر دریافت کرو

(۳) اگر نصف قطر ۹۷ فیٹ ہو اور زاویۂ مرکزی = ۰٫۷۳۴ تو اوسکے سامنے کی قوس دریافت کرو

(۴) اگر نصف قطر ۱۰ فیٹ ۹ انچ ہو اور زاویۂ مرکزی ۰٫۰۱۳۴۷ تو قوس کا حساب بتاؤ

(۵) اگر زاویۂ مرکزی ۱٫۲۵ اور اوسکے سامنے کی قوس ۱۶ فیٹ ہے نصف قطر کا حساب بتاؤ

(۶) اگر زاویۂ مرکز پر ۰٫۰۰۱۵۷ ہو اور اوسکے سامنے قوس ۶ انچ ہو نصف قطر دریافت کرو

(۴) قطر اور محیط کی نسبت محیط اور قطر کی نسبت تقریبی کی قیمت مہندسین نے یہہ دریافت

محیط : قطر :: ۳٫۱۴۱۵۹ : ۱

عدد ۳٫۱۴۱۵۹ کی اکثر ضرورت قوانین علم مثلث مین پڑیگی اسلئے آسانی کے واسطے اس عدد کو ہمیشہ حرف ق سے تعبیر کرتے ہین اب آخر مساوات مین عدد مذکور کی جگہ کہ اور قطر کی جگہ ۲ نق رکھنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ محیط = ۲ کہ نق

(۵) زاویۂ قائمہ کا مقیاس قوسی ۔ مساوات (۲) سے زاویہ قائمہ کا مقیاس قوسی دریافت کر سکتے ہین زاویۂ قائمہ کے سامنے جو قوس ہوتی ہے وہ دائرہ کی ربع محیط کی برابر ہے یعنے ½ کہ نق کے اسکو نق پر تقسیم کرنے سے مساوات (۱) سے یہہ حاصل ہوگا کہ

مقیاس قوسی زاویۂ قائمہ کا = ½ ق

(۶) دائرہ کی تقسیم ساٹھہ ساٹھہ کی پیمانۂ واحد زاویہ کا ایسا بڑا ہے کہ اوسکا اعمال مین استعمال

خالی تکلف سے نہین اور سوا ازین چار قائمے اوسکے اضعاف نہین یعنے پیمانۂ واحد کوئی پورا حصہ چار قائمونکا نہین اسلئے علم ہیئت کے شاہد ہے اور زمین کی مساحت مین ایک اور طریقہ زاویہ کی عددی قیمت بیان کرنے کا اختیار کیا گیا ہے

محیط دائرہ کا ۳۶۰ حصو مین تقسیم کیا ہے اور ایک حصہ کی قوس کے سامنے جو زاویہ مرکز پر واقع ہوتا ہے اوسکا نام درجہ رکھا ہے اور درجہ کو ۶۰ برابر حصو مین تقسیم کرکے ایک حصہ نام دقیقہ رکھا ہے اور پھر اس دقیقہ کو ساٹھہ برابر حصو مین تقسیم کرکے ایک حصہ کا نام ثانیہ رکھا ہے ۔ درجہ دقیقہ ثانیہ کے واسطے یہہ علامتین ° ′ ″ مقرر کی ہین

مثلاً ۴۳° ۲۵′ ۱۸″ سے ۴۳ درجے ۲۵ دقیقے ۱۸ ثانیے مراد ہین

اب جو زاویہ کہ درجہ دقیقہ ثانیہ مین بیان کیا جائے اوسکی تحویل ضرور ہے کہ مقیاس قوسی کی طرف اور جو زاویہ موافق مقیاس قوسی کے بیان کیا جائے اوسکے درجہ دقیقہ ثانیہ کیطرف تحویل کیجائے اس مطلب کے واسطے اس امر کا دریافت کرنا پر ضرور ہے کہ زاویہ کے پیمانۂ واحد مین کتنے ثانیے ہوتے ہین

زاویہ کے پیمانہ واحد کے ثانیون : چار قائمونکے ثانیون سے :: قوس ا د : محیط

یعنے زاویہ کے پیمانہ واحد کے ثانیون : ۳۶۰ × ۶۰ × ۶۰ :: نق : ۲ کہ نق

اور چونکہ کہ = ۳٫۱۴۱۵۹ اسلئے

زاویہ کے پیمانہ واحد کی تعداد ثانیون کی = ۲۰۶۲۶۵″

اگر زاویہ کے سامنے کی قوس کا طول ط ہو اور اوسمین تعداد ثانیونکی ز″ ہو تو

ز″ : ۲۰۶۲۶۵″ :: ط : ا د

اور چونکہ ا د = نق

اس سے یہہ استخراج ہوتا ہے کہ ز″ = ۲۰۶۲۶۵″ × $\frac{ط}{نق}$ (س)

یعنی تعداد ثانیون کی = ۲۰۶۲۶۵″ × مقیاس قوسی

مساوات (۳) مین نصف قطر اور زاویہ مرکزی کی تعداد ثانیونکی اور طول قوس کا جو اوسکے سامنے ہو آپسمین ربط دیئے گئے ہین ان تین مین سے جب دو معلوم ہونگے تو تیسرا معلوم معلوم ہوجائے گا

امثلہ مشق ۲

(۱) ۶۰° کے زاویہ کی تحویل مقیاس قوسی کیطرف کرو

(۲) ۸ کے زاویہ کی تحویل مقیاس قوسی کی طرف کرو

(۳) جس زاویہ کا مقیاس قوسی $\frac{3}{4}$ ہو اوسمین درجے یا دقیقے ثانیے دریافت کرو

(۴) جس زاویہ کا مقیاس قوسی ۰٫۲۵۶ ہو اوسمین تعداد درجے دقیقے ثانیون کی بتلاؤ

(۵) زاویہ کے پیمانۂ واحد مین تعداد درجے دقیقے ثانیون کی دریافت کرو

(۶) ۵° کا مقیاس قوسی کیا ہے

(۷) ایک دائرہ کا نصف قطر ۱۰۰ فیٹ ہے اوسمین ۹ فیٹ کی قوس کے سامنے جو زاویہ ہو اوسمین تعداد درجے دقیقے ثانیون کی دریافت کرو

(۸) ایک شخص کرہ کے مرکز پر کھڑا ہوا دیکھتا ہے کہ کرہ کے سطح پر ایک خط ۶ فیٹ کا ہے اور اوسکے سامنے زاویہ ۲۸° ۳' کا ہے اوس کرہ کا نصف قطر دریافت کرو

(۹) زمین کا قطر ۷۹۲۶ میل کا ہے اور اوسکا فاصلہ چاند سے ۲۳۷۶۳۸ میل ہے تو بتاؤ زمین کے قطر کے سامنے چاند مین کتنا بڑا زاویہ ہوگا

(۱۰) زمین پر زاویہ قمر کے قطر کے سامنے ۵۱' ۲" ہے قمر کا قطر بتاؤ

(۱۱) یہہ امر تحقیق کیا گیا ہے کہ قطر زمین کے محاذی مرکز آفتاب پر زاویہ ۸٫۷ ہے آفتاب کا فاصلہ زمین سے دریافت کرو

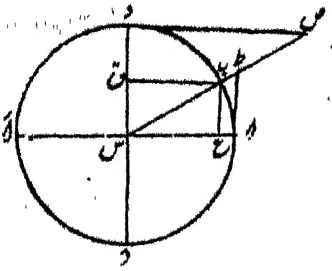
(۱۲) زمین پر آفتاب کا قطر زاویہ ۳۲' ۳" بناتا ہے تو اوسکا قطر دریافت کرو

باب دوم

علم مثلثی جملے

(۱) قوس کے مثلثی جملے (۲) ارتباطات باہمی مثلثی جملون کے (۳) اتفاق جمہور علماء مثبت اور منفی کے باب مین (۴) مثلثی جملون کی قیمتون کی تحقیقات کرنی (۵) زاویہ کے مثلثی جملے (۶) منفی زاویئے (۷) ایک زاویہ کے مثلثی جملون کے ارتباطات (۸) جملہائے متساویہ (۹) زاویون کی تمامی یا متمم (۱۰) زاویون کا تکملہ یا مکمل (۱۱) جداول مثلثی

(۱) قوس کے مثلثی جملے بعض خاص خطوط قوس پر موقوف ہوتے ہین اونکا نام قوس کے علم مثلثی جملے رکھا گیا ہے اور اون کی تعریف یہہ کی گئی ہے ٭



س کو مرکز اور کسی خط س ا کو نصف قطر فرض کرکے ایک دائرہ کھینچو اور نقطہ س سے دو قطر ا د اور د د متقاطع علی القوائم کھینچو اور ا ب کوئی قوس لو اور فرض کرو کہ وہ اوپر کیطرف س ا سے پیمائش کیجاتی ہے اور نقطہ ب انجام قوس سے ب ع عمود س ا پر نکالو اور ب ق عمود س د پر کھینچو اور نقاط ا و د سے خطوط مستقیم ا ط اور د ص دائرہ کو مس کرتے ہوئے کھینچو اور نصف قطر س ب کو بڑھاؤ کہ وہ اون سے نقاط ط اور ص پر ملین ٭

حدود یعنے تعریفات

قوس کے ایک انجام سے کوئی قطر کھینچا جائے اور اوسپر قوس کے دوسرے انجام سے عمود نکالا جائے تو اس عمود کو جیب قوس کی

جیب قوس ا ب کی خط ب ع ہے

جیب التمام یا جیب المتمم قوس کی وہ عمود ہے جو قوس کے انجام سے اوس قطر پر نکالا جائے کہ اول پر حد دائرہ بناتا ہے ٭

قوس [illegible] کی خط ب ق = س ع

مماس قوس کا وہ خط مستقیم ہے جو دائرہ کو قوس کے آغاز پر مس کرے اور اوس نصف قطر ممدودہ پر ختم ہو جو قوس کے انجام مین گذرتا ہے ٭

قوس اب کا مماس خط ا ط ہے ٭

مماس التمام یا مماس المتمم قوس کا وہ خط ہے کہ دائرہ کو ربعہ اول کے آغاز پر مس کرے اور نصف قطر ممدودہ پر جو قوس کے انجام مین گزرتا ہے مختتم ہو

قوس اب کا مماس التمام خط د ص ہے ٭

قاطع القوس قوس کا وہ خط مستقیم ہے کہ مرکز دائرہ سے قوس کے انجام مین ملکر بڑھایا جائے اور مماس پر ختم ہو جائے ٭

قوس اب کا قاطع القوس س ط ہے

قاطع التمام یا قاطع المتمم قوس کا وہ خط مستقیم ہے کہ مرکز دائرہ سے قوس کے انجام مین ملا کر بڑھایا جائے اور مماس پر ختم ہو

قوس اب کا قاطع یا قاطع المتمم س ص ہے

جیب معکوس قوس کی وہ خط مستقیم ہے کہ قوس کی ابتدا اور جیب کی انتہا کے درمیان واقع ہو

قوس اب کی جیب معکوس جیب ا ع ہے

جیب معکوس التمام قوس کی وہ خط مستقیم ہے کہ ربعہ اول کے انجام اور پائین جیب التمام کے درمیان واقع ہو

قوس اب کی جیب معکوس التمام د ق ہے

یہہ امر شکل سے ظاہر ہے کہ خطوط ب ق و د س و س ص و د ق تو جیب اور مماس اور قاطع القوس اور جیب معکوس قوس د ب ہیں اور قوس د ب تمامی المتمم اب کی ہے یہی وجہ تسمیہ جیب التمام اور مماس التمام اور قاطع التمام اور جیب معکوس التمام قوس اب کے ہوتی ہے کہ وہ زاویہ کی تمامی یا متمم کی جیب اور مماس وغیرہ ہین چونکہ س ع = ب ق تو قوس اب کی جیب التمام کی یہہ تعریف ہو سکتی ہے کہ وہ خط مستقیم ہے کہ مرکز اور پائین جیب کے

علم مثلثی جملے

درمیان واقع ہوا اختصاراً جیب کا جب اور جیب التمام کا جم اور مماس کا مس اور مماس التمام کا مم اور قاطع الزاویہ کا قط اور قاطع التمام کا قم اور جیب معکوس کا جع اور جیب معکوس التمام کا جعم لکھا کرتے ہین ؛

(۲) **قوس کے مثلثی جملونکا ارتباط** چونکہ زاویئے ب ع س اور س د ص قائمہ ہین تو بحکم (۴۷ ش ۱ م) کے

س ب² = ب ع² + س ع²

س ط² = س د² + د ط²

س ص² = س د² + د س²

اگر دائرہ کے نصف قطر کو نق سے تعبیر کرین تو

نق² = جیب² قوس + جیب التمام² قوس

قاطع² قوس = نق² + مماس² قوس

قاطع² تمام قوس = نق² + مماس² تمام قوس

چونکہ مثلث س ب ع اور ص س د متشابہ الزوایا ہین تو بحکم (۴۷ ش ۶ م) کے یہہ تناسب حاصل ہونگے ؛

مس قوس : نق :: جیب قوس : جم قوس

مم قوس : نق :: جم قوس : جیب قوس

قط قوس : نق :: نق : جم قوس

مم قوس : نق :: نق : مس قوس

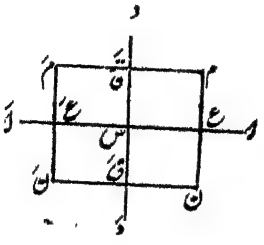
قم قوس : نق :: نق : جیب قوس

چونکہ ع ع = س د - س ع اور د ق = د س - ب ع

تو جع قوس = نق - جم قوس

جعم قوس = نق - جیب قوس

(۳) علامت مثبت اور منفی کی باب مین اتفاق جمہور یہہ مثلثی جملونکی تعریفات جامع اور مانع ہین اسلئے وہ ہر مقدار کی قوس کے اندر مستعمل ہو سکتے ہین اگر کوئی قوس ربعہ دائرہ سے بڑی ہو تو بعض خطوط جنکی تعریف اوپر کی گئی ہے قطر عمودی دو کی بائین طرف واقع ہونگے اور بعض قطر افقی ا ا کے ماتحت اب ان مختلف مقامات کے تعین کرنیکے واسطے سب مہندسین نے اتفاق کرکے علامت مثبت اور منفی کی باب مین ایسی بات مقرر کی ہے جس سے مقام اور مقدار خطونکی نہایت آسانی سے تعبیر ہو سکے

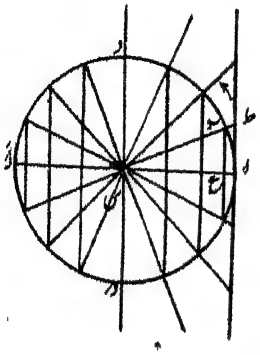


فرض کرو کہ دو خطوط مستقیم ا ا اور د د نقطہ س پر تقاطع کرتے ہین اور نقطہ س کو اصل مبدا مقرر کرین جس سے تمام خطوط ناپے جائین جو خطوط ا ا پر س کے دائین پیمائش کرین انہین مثبت یعنے + کہتے ہین اور جو خطوط س کے بائین طرف پیمائش کرین اونہین منفی یعنے - کہتے ہین ہر ایک خط جو د د پر س سے اوپر پیمائش کیا جائے اوسے مثبت یعنے + کہتے ہین اور ہر ایک خط جو د د پر س سے نیچے پیمائش کیا جائے اوسے منفی یعنے - کہتے ہین پس اگر م سے ا ا اور د د کے متوازی خط کھینچین تو س ع مثبت ہے کیونکہ وہ س کے دائین طرف واقع ہوتا ہے اور م ع مثبت ہے اسلئے کہ وہ اپنے مساوی ا س ق سے ناپا جاتا ہے اور س ق اوپر س کے واقع ہے اور بموافق اسی اصول کے س ع اور ن ع دونو - ہین م ع + ہے اور ن ع - ہے

(۴) مثلثی جملون کی قیمتون کی تحقیقات قوس کی مختلف جملون کے قیمتونکی تحقیقات شکل ذیل مین کرتے ہین اسمین نقطہ دائرہ کے گرد ہر کی سمت مین پھرتا ہی یہ حسابات بخوبی معلوم

جیب

(جس سمت مین حرکت ہوتی ہی اوسمین یہہ نشان تیر کی چال کا کرتے ہین اوسکا سر سمت حرکت بتاتا ہی)



ول اور دوسرے ربعہ مین جیب مثبت ہے اور
وسکی مقدار ۰ سے ل تک اور ق سے ۰ تک
دلتی رہتی ہے
تیسرے چوتھے ربعہ مین جیب منفی ہے اور مقدار
ہن ۰ سے - ل تک اور - ق سے تک
بدلتی ہے

جیب التمام

پہلے اور چوتھے ربعہ مین جیب التمام مثبت ہے اور مقدار مین ل سے ۰ تک اور ۰ سے
ل تک بدلتی رہتی ہے - دوسرے تیسرے ربعہ مین جیب التمام منفی اور ۰ سے - ل تک
اور - ق سے ۰ تک بدلتی رہتی ہے ؛

مماس

اول اور سوم ربعہ مین مماس مثبت ہوتا ہے اور مقدار مین ۰ اور لا انتہا کے درمیان بدلتا
دوسرے اور چوتھے ربعہ مین مماس منفی ہوتا ہے اور مقدار مین منفی لا انتہا سے اور کے
درمیان بدلتا رہتا ہے
یہہ اختلافات علامات کے نقشہ ذیل کے خانون مین لکھے جاتے ہین ۔

نقشۂ اول

	دائرہ کی برجات			
	اول	دوم	سوم	چہارم
جیب	+	+	-	-
جیب التمام	+	-	-	+
مماس	+	-	+	-

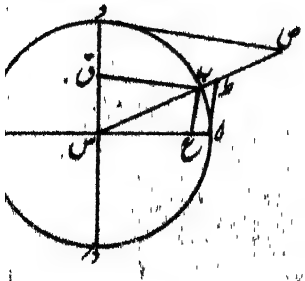
فرض کرو کہ ربعہ قوس کا طول ق سے تعبیر ہوتا ہے

نقشۂ دوم

	۰	ق	۲ق	۳ق
جیب	۰	ل	۰	- ل
جیب التمام	ل	۰	- ل	۰
مماس	:	∞	۰	- ∞

(۵) **ایک زاویہ کے مثلثی جملے** اون خطوط کے موافق جو قوس کے جملے ہوتے ہین خاص نسبتین ہوتی ہین اونکو اوس زاویہ کے کہ قوس کے محاذی ہون علم مثلثی جملے کہتے ہین اور اونکی تعریف اکثر اسطرح ہوا کرتی ہے +

تعریف دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ ہو اوسکی جیب اور جیب التمام اور مماس وغیرہا وہ نسبتین کہلاتی ہین جو اوس زاویہ کے سامنے کے قوس کے جیب اور جیب التمام وغیرہا نصف قطر دائرہ سے نسبت رکھتے ہین جیسے کہ شکل ذیل مین مذکور ہین



ع ب / ق جیب زاویہ ا س ب کی

س ع / ق جیب التمام 〃

ا ط / ق مماس 〃

س ط / ق قاطع الزاویہ 〃

د ص / ق مماس التمام 〃

س ص / ق قاطع التمام 〃

ا ع / ق جیب معکوس 〃

د ب / ق جیب معکوس 〃

اسیواسطے اگر زاویہ ا س ب کو ا سے تعبیر کرین

جب ا = جب قوس / ق

جم ا = جم قوس / ق

مس ا = مس قوس / ق

قط ا = قط قوس / ق

قم ا = قم قوس / ق

جع ا = جع قوس / ق

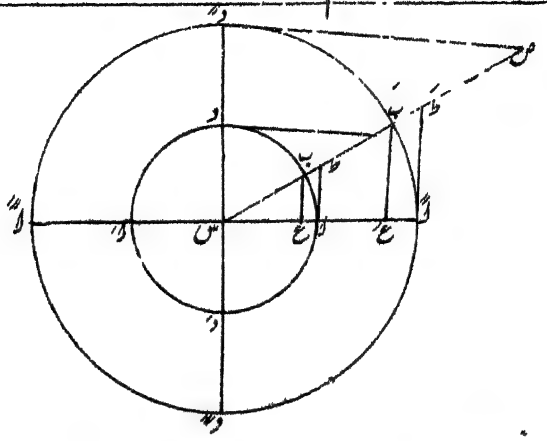
جعم ا = جعم قوس / ق

زاویہ اور اوسکے سامنے کی قوس کے درمیان جو ربط ہے وہ یہہ ہے

ا = قوس / ق

بعینہ ایسی ہی کیفیت ارتباطات مذکور کی ہے

زاویۂ معلوم کے سامنے جو قوس ہو اوسکے مثلثی جملے نصف قطر کی مقدار پر موقوف ہوتے ہین مگر برخلاف اسکے زاویہ کے مثلثی جملے کچھہ تعلق نصف قطر سے نہین رکھتے اور وہ اسکی مقدار پر موقوف نہین ہوتی وجہ اسکی یہہ ہے کہ اگر دائرہ نصف قطر کلاں س ا پر کھینچین تو خطوط ب ع اور س ع اور ا ط وغیرہا جملے مثلثی قوس ا ب کے بڑے بہ نسبت قوس ا ب کے جملون کے ہین مگر ان خطون کی نسبتین نصف قطر سے بڑے دائرہ مین وہی ہین جو اونکے متناظر خطوط کی نسبت نصف قطر سے دائرہ خورد مین ہین اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ زاویہ کے مثلثی جملے نصف قطر سے بالکل بے تعلق ہین اور اوس کی مقدار پر موقوف نہین +



مثلاً مثلث س ع ب اور س ب' ع متساوی الزوایا ہین اسواسطے

$$\frac{\text{ب ع}}{\text{س ب}} = \frac{\text{ب' ع'}}{\text{س ب'}} = \text{حس ا}$$

$$\frac{\text{س ع}}{\text{س ب}} = \frac{\text{س ع'}}{\text{س ب'}} = \text{حم ا}$$

ان مساوتون سے اور حس اور حم التمام زاویہ کے تعریفات سی یہہ شکل مرتب ہوتی ہے

پہلی شکل

مثلث قائم الزاویہ مین وتر کے کسی متصل زاویہ کا مقابل کا ضلع تقسیم کیا گیا وتر پر برابر ہوتا ہے اوس زاویہ کی جیب کی اور اوسکی متصل کا ضلع تقسیم کیا گیا وتر پر برابر ہوتا ہے اوس زاویہ کے جیب التمام کے — اس سے پہلے فصل اخیر مین جو ہم نے جدول لکھی ہے اوس مین ہر جملے کو بق پر تقسیم کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

	۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰
	۰	$\frac{\text{پا}}{\text{۲}}$ ک	پا ک	$\frac{\text{۳ پا}}{\text{۲}}$ ک
جیب	۰	۱	۰	۱-
جیب التمام	۱	۰	۱-	۰
مماس	۰	∞	۰	∞-

(۶) **منفی زاویے** — ہم نے جو تعریفین مثلثی جملون کی لکھی ہین اوسمین زاویہ کو

مثبت نصف قطر س ا سے تیر کی سمت مین پیمائش کیا ہے پس جب ایسے زاویون کو مثبت جانا کرتے ہین تو ضرور ہے کہ جو زاویے کہ تیر کے نیچے کیطرف ناپے جائین اون کو منفی کہین +

شکل دوم

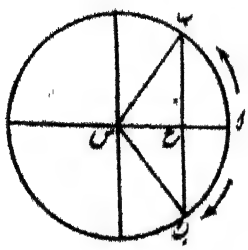
دعوی زاویہ کی جیب زاویہ کی علامت بدلنے سے بدل جاتی ہے اور جیب التمام وہی رہتی ہے

بیان دعوی فرض کرو کہ زاویہ ا ہو تو

جب (- ا) = - جب ا

جم (- ا) = جم ا

عمل شکل مرکز س اور کسی طول س ا کو نصف قطر مقرر کرکے دائرہ کھینچو اور زاویہ ا س ب = ا اور ا س ب' = - ا کے بناؤ اور ملاؤ ب ب'



ثبوت (بحکم ۴ س ام) کے ظاہر ہے کہ مثلث س ع ب اور س ع ب' سبطرح سے برابر ہین کیونکہ س ع قائمے زاویے ب ب' پر بناتا ہے بموجب پہلی شکل کے

جب (- ا) = $\frac{\text{ب' ع}}{\text{س ب'}}$ اور جب ا = $\frac{\text{ب ع}}{\text{س ب}}$

لیکن ب' ع اور ب ع مقدار مین متساوی ہین اور علامت مین س ب مخالف ہین (موافق فصل ۳ کی) اسواسطے

جب (- ا) = - جب ا

اور پھر س ع مثلث ب س ع اور ب' س ع مین مشترک ہے اسواسطے

جم (- ا) = جم ا یہی ثابت کرنا تھا

نتیجہ صریح مماس اور مماس التمام کے جملے جو اور قائم جیب اور جیب التمام مین لکھے ہین [illegible] سے مستنبط ہوتا ہے کہ

جب زاویہ کی علامت بدل جائے تو اونکے مماس اور مماس التمام کی بہی علامات بدل جائے

(۷) زاویون کے مثلثی جملون کے ارتباطات جو قوس کے علم مثلثی جملون کے ارتباط لکھے ہین اونہین سے ارتباطات زاویہ کے علم مثلثی جملونکے آسانی سے نق پر تقسیم کرنے سے استخراج ہوسکتے ہین

یا اسطرح سے

شکل صفحہ ۱۱ مین مثلث ب س ع اور ص س د قائم الزاویہ ہین تو بحکم (۳۴ ش ۱) یہہ حاصل ہونگے +

س ب² = ب ع² + س ع²

س ط² = س ل² + ل ط²

س ص² = س د² + د ص²

ان مساویون مین ہر ایک مساوات کو نق پر تقسیم کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$1 = \left(\frac{ب ع}{نق}\right)^2 + \left(\frac{س ع}{نق}\right)^2$$

$$\left(\frac{س ط}{نق}\right)^2 = 1 + \left(\frac{ل ط}{نق}\right)^2$$

$$\left(\frac{س ص}{نق}\right)^2 = 1 + \left(\frac{د ص}{نق}\right)^2$$

ان نسبتون کی جگہہ اونکے علم مثلثی قیمتین جو آخر فصل کی تعریفات مین بیان ہوئی ہین مندرج کرو تو ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے

۱ = حت² ل + حم² ل (۱)

قط² ل = ۱ + مس² ل (۲)

قم² ل = ۱ + مم² ل (۳)

چونکہ مثلث س ط ع اور ص س د متساوی الزوایا ہین تو بحکم (۴ ش ۱ م) یہہ تناسب حاصل ہونگے

ا ط : ا س :: ب ع : س ع

د ص : د س :: س ع : ع ب

س ط : س ا :: س ب : س ع

د ص : د س :: س ا : ا ط

س ص : س د :: س ب : ب ع

ان تناسب کی ہر رقم کو ق پر تقسیم کرو +

$\frac{ا ط}{ق}$: ا :: $\frac{ب ع}{ق}$: $\frac{س ع}{ق}$

$\frac{د ص}{ق}$: ا :: $\frac{س ع}{ق}$: $\frac{ب ع}{ق}$

$\frac{س ط}{ق}$: ا :: ا : $\frac{س ع}{ق}$

$\frac{د ص}{ق}$: ا :: ا : $\frac{ا ط}{ق}$

$\frac{س ص}{ق}$: ا :: ا : $\frac{ب ع}{ق}$

ان نسبتوں کی جگہ علم مثلثی قیمتوں کے رکھنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے +

کہ مس ا : ا :: جب ا : جم ا

جم ا : ا :: جم ا : جیب ا

قط ا : ا :: ا : جم ا

جم ا : ا :: ا : سا ا

قم ا : ا :: ا : جب ا

ان تناسب سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے +

مس ا = $\frac{جب ا}{جم ا}$ (۴)

قم ا = $\frac{جم ا}{جب ا}$ (۵)

قط ا = $\frac{ا}{جم ا}$ (۶)

جم ا = $\frac{ا}{مس ا}$ (۷)

قم ا = حسا ا (۸)

اور چونکہ ا ع = ا س − س ع اور ا ق = ا س − ب ع

جع ا = ۱ − جم ا
جم ا = ۱ − جب ا (۹)

(۸) **جملہ ہائے متساویہ** ان مساواتوں کی وساطت سے ہر ایک جملہ ایک اور جملہ کی رقموں میں بیان ہو سکتا ہے مثلاً

فرض کرو کہ جب ا کو جم ا کی رقموں میں بیان کرنا منظور ہو اور بالعکس اسکے تو بموجب مساوات (۱) کے

جب ا = √(۱ − جم² ا) (۱۰)

جم ا = √(۱ − جب² ا) (۱۱)

فرض کرو کہ مس ا کو جب ا کی رقموں میں بیان کرنا منظور ہے۔ مساوات (۴) میں جم ا کی جگہ قیمت اوسکی مساوات (۱۱) کی لکھو تو

مس ا = جب ا / √(۱ − جب² ا) (۱۲)

فرض کرو کہ مس ا کو جم ا کی رقموں میں بیان کرنا منظور ہے تو مساوات (۴) میں جب ا کی جگہ قیمت اوسکی مساوات (۱۰) کی لکھو تو

مس ا = √(۱ − جم² ا) / جم ا (۱۳)

فرض کرو کہ جم ا کو مس ا کی رقموں میں بیان کرنا منظور ہے بموجب مساوات (۶) کے

جم ا = ۱ / قا ا

بموجب مساوات (۱۲) کے قا ا = √(۱ + مس² ا)

اسواسطے جم ا = ۱ / √(۱ + مس² ا) (۱۴)

فرض کرو کہ جب ا کو مس ا کی رقموں میں بیان کرنا منظور ہے بموجب مساوات (۴) کے

حب ا = حم ا مس ا

اب حم ا کی قیمت مساوات (۱۴) والی اسمین رکھی تو

$$\text{حب ا} = \frac{\text{مس ا}}{\sqrt{1+\text{مس}^2\text{ا}}} \qquad (15)$$

فرض کرو کہ جب ا کو قطا کی رقمون مین بیان کرنا منظور ہے

بموجب مساوات ۱۱ کے جب² ا = ۱ − حم² ا

بجائی حم² ا کے قیمت اوسکی مساوات (۷) مین رکھو

$$\text{حب}^2\text{ا} = 1 - \frac{1}{\text{قطا}^2\text{ا}}$$

نسب نما متحد کیا تو اور جذر لیا تو

$$\text{جب ا} = \frac{\sqrt{\text{قطا}^2\text{ا} - 1}}{\text{قطا ا}} \qquad (16)$$

فرض کرو کہ حم ا کو قم ا کی رقمون مین بیان کرنا منظور ہے

بموجب مساوات (۵) کے حم ا = قم ا حب ا

قم ا کی قیمت مساوات (۳) کی اور جب ا کی قیمت مساوات (۸) کی رکھی تو

$$\text{حم ا} = \frac{\sqrt{\text{قم}^2\text{ا} - 1}}{\text{قم ا}} \qquad (17)$$

فرض کرو کہ قم ا کی قیمت قطا کی رقمون مین دریافت کرنی منظور ہے

بموجب مساوات (۷) اور (۲) کے

$$\text{قم ا} = \frac{1}{\sqrt{\text{قطا}^2\text{ا} - 1}} \qquad (18)$$

فرض کرو کہ مس ا کو جیب ا کی رقمون مین بیان کرنا منظور ہے

بموجب مساوات (۱۳) کے $\text{مس ا} = \frac{\sqrt{1 - \text{حم}^2\text{ا}}}{\text{حم ا}}$

بجائی حم ا کے اوسکی قیمت مساوات (۹) کی لکھو تو

$$\text{مس ا} = \frac{\sqrt{1 - (1 - \text{جیب ا})^2}}{1 - \text{جیب ا}}$$

اگر جذر کے نیچے کی مقدار کا اختصار کرین تو

$$\text{مس ا} = \frac{\sqrt{\text{۲ جع ا - جع ۲ ا}}}{\text{۱ - جع ا}} \qquad (۱۹)$$

امثلۂ مشق ۳

(۱) اگر جب ا = ۰٫۴۲ تو جم ا کا حساب بتاؤ

(۲) اگر مس ا = ۰٫۷ تو جم ا 〃

(۳) اگر مس ا = ۱ ½ تو جب ا 〃

(۴) اگر جم ا = ⅝ تو مس ا 〃

(۵) اگر جع ا = ۳/۲۰ تو مس ا 〃

(۶) اگر مس ا = ۰٫۶ تو جب ا 〃

(۷) اگر ظ ا = ۱ ۳/۲۰ تو جب ا 〃

(۸) اگر جب ا = ۰٫۷ تو جم ا 〃

(۹) اگر مس ا = ۲۰ تو جیب ا 〃

(۱۰) اگر جم ا = ۵ تو ظ ا 〃

(۱۱) اگر جع ا = ¼ تو مس ا 〃

(۱۲) اگر جع ا = ¼ تو جیب ا 〃

(۹) زاویون کی تمامی

حد زاویہ جسقدر زاویۂ قائمہ سے کم ہوتا ہے اوسکو تمامی زاویہ یا متمم زاویہ کا کہتے ہین مثلاً تمامی زاویہ ۶۰° کی ۳۰° اور ۹۰° ۳۲′ کی ۴۰° ۲۸′ اور ۶۲° ۴′ کی ۲۷° ۵۶′ ۱۲″ ہے اگر ا مقیاس قوسی کسی زاویہ کا ہو تو

تمامی زاویہ ا = ½ ک − ا

اگر ا زاویہ مین ساٹھ ساٹھ کی تقسیم کے موافق درجون کی تعداد ہو

تمامی ا° = ۹۰° - ا°

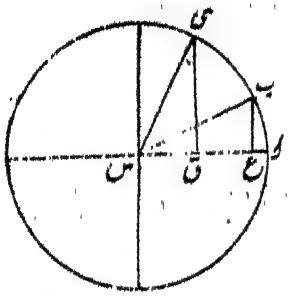
۳ شکل

دعوی جیب کسی زاویہ کی اوسکی تمامی کی جیب التمام کی برابر ہوتی ہے

بیان دعوی فرض کرو کہ ا زاویہ ہے تو

جب ا = جم (½ کہ - ا) (۲۰)

عمل شکل س کے مرکز اور کسی طول س ا کے نصف قطر پر دائرہ کھینچو اور زاویہ ا س ب برابر زاویہ ا کے اور ا س ی برابر تمامی (½ ک - ا) کے بناؤ اور ی ق اور ب ع عمود ا س پر نکالو



اثبات چونکہ زاویہ ق ی س تمامی زاویہ ا س ی کے برابر زاویہ ا س ب کے ہی اور زاویے س ع ب اور س ق ی دونو قائمے ہیں اور ب س برابر ہے ی س کے اسواسطے بحکم (۲۶ ش ا م) کے ب ع برابر ہے س ق کے اور اسیواسطے

$$\frac{\text{ب ع}}{\text{ب س}} = \frac{\text{س ق}}{\text{س ی}}$$

لیکن $\frac{\text{ب ع}}{\text{ب س}}$ جیب ا کے اور $\frac{\text{س ق}}{\text{س ی}}$ جیب التمام (½ ک - ا) کے ہے اسیواسطے

جب ا = جم (½ ک - ا) فہوالمراد

چوتھی شکل

دعوی ہر ایک زاویہ کی جیب التمام اور اوسکی تمامی کی جیب آپسمین برابر ہوتی ہیں

بیان دعوی فرض کرو کہ ا زاویہ ہو تو

جم ا = جب (½ ک - ا) (۲۱)

عمل شکل آخر شکل کیطرح شکل بناؤ

اثبات بحکم (۲۶ ش ام) کے خط س ع برابر خط ی ق کے اسیواسطے

$$\frac{\text{س ع}}{\text{س ب}} = \frac{\text{ی ق}}{\text{ی س}} \quad \text{اسیواسطے}$$

جم ا = جیب (½ کہ - ا) فہو المراد

پانچوین شکل

دعوی زاویہ کا مماس اور اوسکی تمامی کا مماس التمام آپسمین برابر ہوتا ہے

بیان دعوی فرض کرو کہ ا زاویہ ہو تو

مس ا = مم (½ کہ - ا) (۲۲)

اثبات مساوات (۲۰) کو مساوات (۲۱) پر تقسیم کرو تو یہہ حاصل ہوگا

مس ا = مم (½ کہ - ا) فہو المراد

چھٹی شکل

دعوی زاویہ کا مماس التمام اور اوسکی تمامی کا آپسمین برابر ہوتے ہین

بیان دعوی فرض کرو کہ ا زاویہ ہو

مم ا = مس (½ کہ - ا) (۲۳)

اثبات مساوات (۲۱) کو (۲۰) پر تقسیم کرو تو یہہ حاصل ہوگا

مم ا = (½ کہ - ا) فہو المراد

(۱۰) زاویون کا تکملہ یا مکمل

حد ایک زاویہ جسقدر دو قائمون سے کم ہو اوسکو تکملہ یا مکمل اوس زاویہ کا کہتے ہین جیسے کہ تکملہ ۶۰° کا ۱۲۰° اور ۲۹° ۳۷′ کا ۱۵۰° ۲۳′ اور ۴۸° ۲۶′ ۴۲″ کا ۱۳۱° ۳۳′ ۱۸″ ہے

تکملہ ا = کہ - ا

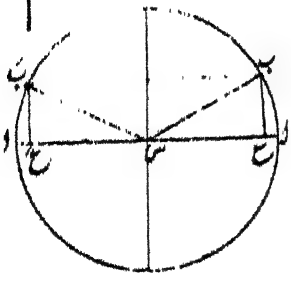
تکملہ ا = ۱۸۰° - ا

ساتوین شکل

دعوی زاویہ کی جیب اور اوسکی تکملہ کی جیب آپسمین برابر ہوتی ہین

بیان دعوی فرض کہ ا زاویہ ہے تو

جیب ا = جب (کہ − ا) (۲۴)



عمل شکل س کے مرکز اور کسی طول س ا کے نصف قطر پر ایک دائرہ کھینچو اور زاویہ ا س ب برابر ا کے اور ا س ب برابر (کہ − ا) کی بناؤ اور ا ا پر عمود ب ع اور ب ع نکالو

اثبات چونکہ ع س ب تکملہ زاویہ ع س ا کا ہے اور برابر ہے ع س ب کے اور زاویہ ع ب س اور ب ع س قائمی ہین اسواسطے بحکم (۲۶ ش ام) کے ب ع برابر ہے ب ع کے اور اسیواسطے

$$\frac{\text{ب ع}}{\text{ب س}} = \frac{\text{ب ع}}{\text{ب س}}$$

لیکن $\frac{\text{ب ع}}{\text{ب س}}$ جیب زاویہ ا کی اور $\frac{\text{ب ع}}{\text{ب س}}$ جیب (کہ − ا) کی ہے اسواسطے

جب ا = (کہ − ا) فہوالمراد

آٹھوین شکل

دعوی جیب اتمام زاویہ کی برابر اوسکے تکملہ کے جیب اتمام کی ہوتی ہے مگر اوسکی علامت بدلی ہوئی ہوتی ہے

بیان دعوی فرض کرو کہ ا زاویہ ہے تو

جم ا = − جم (کہ − ا) (۲۵)

عمل شکل آخر شکل کیطرح شکل بنالو

اثبات بحکم (۲۶ ش ام) کے خط س ع اور س ع آپسمین برابر ہین مگر وہ مرکز کے مقابل جانبون مین واقع ہین اسواسطے (فصل سوم) کی رو سے مختلف العلامت ہین

$$\frac{\text{س ع}}{\text{س ب}} = \frac{\text{س ع}}{\text{س ت}}$$

اسیواسطے حم ا = جم (کہ - ا) فہوالمراد

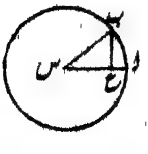
نتیجہ مساوات ۲۴ کو مساوات ۲۵ پر تقسیم کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

مس ا = مس (کہ - ا) (۲۶)

(۱۱) جداول علم مثلثی ربعہ دائرہ مین ہر درجہ اور دقیقہ کے علم مثلثی جملون کا یعنی جیب اور جیب التمام اور مماس وغیرہما کا حساب کیا گیا ہے اور اونکی لوکارثمین جدولونمین اپنی اپنی پیشانی کے ماتحت لکھے ہین اونکے استعمال کا طریقہ انہین جدولون کے ساتھہ ایک جدا رسالہ جداول لوکارثمی مین بیان ہوا یہان ہم اسبات کا ذکر نہین کرتے کہ ان جملون کے اعداد مین قیمت کس ترکیب اور حکمت سے نکالتے ہین مگر توضیح مطلب کے واسطے چند خاص زاویون کے جیب اور جیب التمام اور مماس کا ذکر کرتے ہین ؛

۴۵°

فرض کرو کہ ۴۵° کی جیب اور جیب التمام اور مماس وغیرہما دریافت کرنے منظور ہین کسی مرکز س پر اور نصف قطر س ا = نق پر دائرہ کھینچو اور ا س ب = ۴۵° کے بناؤ اور ب ع عمود ا س پر نکالو ؛



مثلث قائم الزاویہ ب س ع کا متساوی الساقین ہونا بدیہات سے ہے اور اسیواسطے بحکم (۴۷ ش ام) کے

نق² = ۲ ب ع² = ۲ س ع²

۲ نق² پر ہر طرف مساوات کو تقسیم کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{\text{ب ع}}{\text{نق}}\right)^2 = \left(\frac{\text{س ع}}{\text{نق}}\right)^2$$

لیکن $\frac{\text{ب ع}}{\text{نق}}$ = جب ۴۵° اور $\frac{\text{س ع}}{\text{نق}}$ = جم ۴۵°

اسیواسطی جب ۴۵° = جم ۴۵° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

اور چونکہ جیب اور جیب التمام آپسمین برابر ہین اور مساوات (۴) اور (۵) سی یہہ استخراج ہوتا ہے کہ

مس ۴۵° = مم ۴۵° = ۱

اور مساوات (۲) اور (۳) سی اور مماس اور مماس التمام کی قیمتون سی یہہ مستنبط ہوتا ہے کہ

قط ۴۵° = قم ۴۵° = $\sqrt{2}$

اگر ان اعداد کی قیمتون کا حساب پانچ مرتبہ کی اعشاریہ تک کرین تو یہہ جدول مرتب ہوگی +

جب ۴۵° = ۰٫۷۰۷۱۱

جم ۴۵° = ۰٫۷۰۷۱۱

مس ۴۵° = ۱٫۰۰۰۰۰

مم ۴۵° = ۱٫۰۰۰۰۰

قط ۴۵° = ۱٫۴۱۴۲۱

قم ۴۵° = ۱٫۴۱۴۲۱

۶۰

۶۰° کی جیب اور جیب التمام اور مماس وغیرہا دریافت کرو

اگر د س ب = ۶۰° تو ظاہر ہے کہ مثلث متساوی الاضلاع ہوگا

اور اسیواسطی عمود ب ع تنصیف د س کی کرتا ہے اور اسیواسطی

جم ۶۰° = $\frac{\text{س ع}}{\text{س ب}} = \frac{1}{2}$

بموجب مساوات (۱۰) کے جب ۶۰° = $\sqrt{1 - \text{جم}^2 ۶۰°} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

بموجب مساوات (۴) کے مس ۶۰° = $\frac{\text{جب ۶۰°}}{\text{جم ۶۰°}} = \sqrt{3}$

بموجب مساوات (۵) کے مم ۶۰° = $\frac{1}{\text{مس ۶۰°}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

بموجب مساوات (۶) کے قط ۶۰° = $\frac{1}{\text{جم ۶۰°}} = 2$

بموجب مساوات (۸) جم ۶۰° = جب ۶۰° = $\frac{۲}{۳}$

اکثر ان قیمتون کا حساب پانچ مرتبہ کی اعشاریہ تک کرین تو یہہ جدول مرتب ہوگی

جیب ۶۰° = ۰٫۸۶۶۰۲

جم ۶۰° = ۰٫۵۰۰۰۰

س ۶۰° = ۱٫۷۳۲۰۵

مم ۶۰° = ۰٫۵۷۷۳۵

قط ۶۰° = ۲٫۰۰۰۰۰

قم ۶۰° = ۱٫۱۵۴۷۰

۱۸°

فرض کرو کہ جب اور جیب تمام وغیرہما ۱۸° کی دریافت کرنی منظور ہے

فرض کرو کہ ا س ب = ۱۸° عمود ب ح کو بڑھا کر محیط سے نقطہ ب' پر ملاؤ تو ظاہر ہے کہ زاویہ ب س ب'

برابر دو چند ب س ا = ۳۶°

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ب ب' ضلع معشر منتظم کا ہے جو دائرہ مین بنا ہے اور اسیواسطے بحکم (۱۱ ش ۴۴) کے ب ب' برابر ہے نصف قطر کے بڑے حصہ کے جو اوسکو ذات وسط و الطرفین مین تقسیم کرنے سے پیدا ہوتا ہے اور اسیواسطے بحکم (۱۱ ش ۴۴) و (نتیجہ ۱۱ ش ۴۲) کے

ب ب' = نق × $\frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}$

ب ح = $\frac{۱}{۲}$ ب ب' اسیواسطے

جب ۱۸° = $\frac{ب ب'}{۲ نق}$ = $\frac{\sqrt{۵} - ۱}{۴}$

بموجب مساوات (۱۱) کے جم ۱۸° = $\frac{\sqrt{۱۰ + ۲\sqrt{۵}}}{۴}$

بموجب مساوات (۴) کے مس ۸ أ = $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

بموجب مساوات (۵) کے جم ۸ أ = $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$

بموجب مساوات (۶) کے قط ۸ أ = $\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

بموجب مساوات (۸) کے قم ۸ أ = $\frac{4}{\sqrt{5}-1}$

اکثر ان قیمتون کا حساب پانچ مرتبہ کی اعشاریہ تک کرنے سے جدول ذیل مرتب ہوگی ؛

حب ۸ أ = ۰٫۳۰۹۰۲

حم ۸ أ = ۰٫۹۵۱۰۵

مس ۸ أ = ۰٫۳۲۴۹۲

مم ۸ أ = ۳٫۰۷۷۶۸

قط ۸ أ = ۱٫۰۵۱۴۶

قم ۸ أ = ۳٫۲۳۶۰۷

فرض کرو کہ جب أ کی دریافت کرنی منظور ہے

صفحہ ۶ کے شکل مین فرض کرو کہ زاویہ ب س ع برابر ایک ثانیہ کے ہے

یہہ ظاہر ہے کہ ب ع اور قوس ب ر مین تفاوت اتنے مراتب اعشاریہ کا نہوگا

جنکی تعداد معلوم ہو اور کل محیط کو اوتنے حصون مین تقسیم کرین جتنے ثانیے کہ چار

قائمون مین ہوتے ہین تو ان حصون مین سے ایک حصہ برابر ہے قوس ر ب کے

اسیواسطے ب ع = ب ر = $\frac{2\text{کہ لی}}{60\times60\times360}$

اسیواسطے حب أ = $\frac{\text{ب ع}}{\text{لی}}$ = $\frac{2\text{کہ}}{60\times60\times360}$

اگر اوسکی قیمت کا حساب اعشاریہ کے نو مرتبہ تک کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

حب أ = ۰٫۰۰۰۰۰۴۸۴۸

اور اگر اوسکا حساب کسور عام ہی مین اسیطرح دین تو اوسکا شمار کنندہ ۱ ہوگا اور

حب ا = ۱ / ۲۰۶۲۶۵

اور باب اول کی مساوات (۳) کے ظاہر ہے کہ

۱ × ۲۰۶۲۶۵ = ا

اسیواسطے ا = ۱ / حب ا

اسی مساوات کے ذریعہ سے مقیاس قوسی کی تحویل درجون اور دقیقون اور ثانیون کیطرف اور بالعکس اسکے رسالۂ علم ہیئت مین ہم نے کی ہے

باب سوم

مثلثات قائم الزاویہ

(۱) زاویون اور اضلاع کے درمیان ارتباطات

(۲) مثلثات قائم الزاویہ کی چار صورتین

(۳) چارون صورتون کا حساب بذریعۂ جداول لوکارتمی

(۱) اضلاع اور زاویون کے درمیان ارتباطات

ذیل کی شکلون مین مثلث قائم الزاویہ کے اضلاع اور وتر اور زوایا فوق الوتر کے ارتباطات کا بیان ہے ؛

پہلی شکل

دعوی مثلث قائم الزاویہ مین ہر ایک ضلع برابر ہوتا ہے حاصل ضرب وتر اور اوس ضلع کے زاویہ مقابل کے جیب کے یا زاویہ متصل کے جیب التمام کے

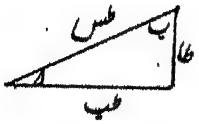
بیان دعوی فرض کرو کہ مثلث قائم الزاویہ مین طس وتر ہو اور طا اور طب اضلاع ہون اور ا اور ب مقابل کے زاویے تو

طا = طس حب ا اور طب = طس حم ا

طا = طس حم ب اور طب = طس حب ب

عمل شکل فرض کرو کہ شکل بنائی جائے جیسی کہ یہہ کھچی ہوئی ہے

اثبات فصل ۴ باب ۲ کی شکل کے موافق



$\frac{\text{طا}}{\text{طس}}$ = جب ا = جم ب اور

$\frac{\text{طب}}{\text{طس}}$ = جم ا = جب ب

اسیواسطے طا = طس جب ا اور طب = طس جم ا

طا = طس جم ب اور طب = طس جب ب

مثلث قائم الزاویہ کے اضلاع اور زوایا، فوق الوتر کے درمیان جو ارتباطات ہین وہ شکل ذیل مین بیان کیے جاتے ہین ؛

دوسری شکل

دعوی مثلث قائم الزاویہ مین ہر ایک ضلع برابر ہوتا ہے حاصل ضرب دوسرے ضلع اور زاویۂ مقابل کے مماس یا زاویہ متصل کے مماس التمام کے

بیان دعوی فرض کرو کہ شکل گذشتہ کیطرح ضلعے اور زاویے تعبیر کیے جائین ؛

طا = طب مس ا اور طب = طا مم ا

طا = طب مم ا اور طب = طا مس ا

اثبات آخر بیان دعوی مین اول مساوات کو دوسری مساوات سے اور تیسری مساوات کو چوتھی مساوات پر تقسیم کرین تو حاصل ہوگا کہ

$\frac{\text{طا}}{\text{طب}}$ = مس ا اور $\frac{\text{طب}}{\text{طا}}$ = مم ا

طا = طب مس ا اور طب = طا مم ا

طا = طب مم ب اور طب = طا مم ب

(۲) مثلثات قائم الزاویہ کی چار صورتین

اگر پانچ مقادیر طا، طب، طس اور ا اور ب مین سے دو معلوم ہون تو باقی تین کا حساب ہو سکتا ہے

اب اسکی چار صورتین ہین یعنے

(۱) دو ضلعے معلوم ہین

(۲) ایک ضلع اور وتر معلوم ہے

(۳) ایک ضلع معلوم ہے اور کوئی ایک زاویہ

(۴) وتر معلوم ہے اور کوئی ایک زاویہ

اس کتاب کے آخر مین تین جدولین لکھی ہین اور اونکا نام اول اور دوم اور سوم جدول ہے اونکے وسیلہ سے یہہ امثلہ مشق حل ہوتی ہین

صورت اول

طا اور طب معلوم ہین طس اور ا اور ب مطلوب ہین بموجب شکل دوم کے

$$\text{مس ا} = \frac{\text{طا}}{\text{طب}}$$

اس مساوات سے مس ا کا حساب ہوسکتا ہے اور جدولون سے ا دریافت ہوسکتا ہے

$$\text{ب} = ٩٠° - \text{ا}$$

اور طس کا حساب اس مساوات سے ہوجائے گا کہ

$$\text{طس} = \sqrt{\text{طا}^2 + \text{طب}^2}$$ بحکم (۴۷ ش ام) کے

امثلہ مشق (۴)

(۱) معلوم ہے کہ طا = ۷۰٫۲۷ اور طب = ۵۰۰ طس اور ا اور ب کو دریافت کرو

(۲) معلوم ہے کہ طا = ۴۰۷٫۴۱ اور طب = ۳۵۰ طس اور ا اور ب کو دریافت کرو

(۳) معلوم ہے کہ طا = ۱۲۷٫۳۸ اور طب = ۲۵۰ طس اور ا اور ب کو دریافت کرو

صورت دوم

طا اور طس معلوم ہین اور طب اور ا اور ب مطلوب ہین بموجب شکل اول کے

$$\text{جب ا} = \frac{\text{طا}}{\text{طس}}$$

جب ا کا حساب اس مساوات سے ہو سکتا ہے اور جدولون سے دریافت ہو سکتا ہے

ب = ۹۰° − ا

اور طب کا حساب اس مساوات سے کہ

طب = √(طس − طا) (۴۷ ش ام)

مثلہ مشق ۵

(۱) معلوم ہے کہ طا = ۱۳۰۳ اور طس = ۱۵ طب اور ا اور ب کو دریافت کرو

(۲) معلوم ہے کہ طا = ۱۲۸۷۶ اور طس = ۲۸۰ طب اور ا اور ب کو دریافت کرو

(۳) معلوم ہے کہ طا = ۵۷۶۷۵ اور طس = ۱۴۱۵ طب اور ا اور ب کو دریافت کرو

صورت سوم

طا اور ا معلوم ہین ب اور طب اور طس مطلوب ہین

بموجب شکل دوم کے طب = طا تم ا

بموجب شکل اول کے طس = طا / جب ا

ب = ۹۰° − ا

مثلہ مشق ۶

(۱) طا = ۱۷۲ اور ا = ۲۳° معلوم ہین ب اور طب اور طس مطلوب ہین

(۲) طا = ۳۱۵ اور ب = ۶۰° معلوم ہین ا اور طب اور طس مطلوب ہین

(۳) طا = ۲۱۰۰ اور ب = ۷۰° معلوم ہین ا اور طب اور طس مطلوب ہین

صورت چہارم

طس اور ا معلوم ہین اور طا اور طب اور ب معلوم ہین

بموجب شکل اول کے

طا = طس جب ا

طب = طس جم ا

ب = ۹۰ - ا

امثلۂ مشق ۷

(۱) طس = ۲۴۰ اور ا = ۳۵° معلوم ہین ب اور طا اور طب مطلوب ہین

(۲) طس = ۵۷۵ اور ب = ۴۴° معلوم ہین ا اور طا اور طب مطلوب ہین

(۳) طس = ۷ اور ا = ۲۹° معلوم ہین ب اور طا اور طب مطلوب ہین

(۳) ان چارون صورتون کا حساب جداول لوکارثمی سے

مثالین جو ہم نے ابھی اوپر لکھی ہین اونکا حساب اصل جیبون کی جدولون سے ہوتا ہے نیچے جو مثالین لکھی ہین وہ فقط اسلئے لکھی ہین کہ جداول لوکارثمی کے استعمال مین مشق ہوجائے اور ان جدولون کی استعمال کی ترکیب ان جدولون کے رسالہ ہی مین لکھی ہین

صورت سوم

طا اور طب معلوم ہین ا اور ب اور طس مطلوب

بموجب شکل دوم

$$\text{مس ا} = \frac{\text{طا}}{\text{جب}}$$

ہر طرف مساوات کے لوکارثم لو

لوگ مس ا - ۱۰ = لوگ - لوگ طب

منتقل کرنیسے لوگ مس ا = ۱۰ + لوگ طا + لوگ طب

اور بموجب شکل اول

$$\text{مس} = \frac{\text{طا}}{\text{جب ا}}$$

طرفین مساوات کی لوکارثم لی

لوگ مس = ۱۰ + لوگ طا - لوگ جب ا

قیمت ا کی جو دریافت کی گئی اوس سے بوساطت مساوات قیمت لوگ طس کی دریافت ہو سکتی ہے اور پہر لوگ طس سے قیمت طس کی بوسیلہ جدول کے دریافت ہو جائے گی *

مثال

طا = ۱۲۱ اور طب = ۴۹ کے معلوم ہین ا اور ب اور طس مطلوب ہین *

۱۰ + لوگ ۱۲۱ = ۱۲ ، ۰۸۲۷۹

لوگ ۴۹ = ۱ ، ۶۹۰۲۰

لوگ مس ا = ۱۰ ، ۳۹۲۵۹

لوگ ۶۷° ۵۷′ = ۱۰ ، ۳۹۲۵۰

تفاوت جدولی = ۳۶ $\frac{۹ \times ۶۰}{۳۶}$ = ۱۵″

ا = ۶۷° ۵۷′ ۱۵″

ب = ۲۲° ۰۲′ ۴۵″

طس کو دریافت کرو ۱۰ + لوگ ۱۲۱ = ۱۲ ، ۰۸۲۷۹

لوگ ۶۷° ۵۷′ = ۹ ، ۹۶۷۰۱

۲ ، ۱۱۵۷۹

لوگ طس = ۲ ، ۱۱۵۷۷ طس = ۱۳۰ ، ۵۵

امثلہ مشق (۸)

(۱) طا = ۳ اور طب = ۴ معلوم ہین طس اور ا اور ب مطلوب

(۲) طا = ۳ میل اور طب = ۳ فرلنگ ۷ پرچ باقی ضلعے اور زاویئے دریافت کرو

(۳) طا = ۱۴۴ فیٹ ۹ انچ اور طب = ربع میل ا اور ب اور طس دریافت کرو

(۴) طا = ۱۳۴۱ اور طب = ۱۴۳۲ معلوم ہین ا اور ب اور طس دریافت کرو

(۵) طا = ۱۷۶۰ اور طب = ۱۰۰۰ معلوم ہین ا اور ب اور طس دریافت کرو

صورت دوم

طا اور طس معلوم ہیں طب اور ا اور ب مطلوب ہیں

بموجب شکل اول کے جب ا = $\frac{\text{طا}}{\text{طس}}$

اسیواسطے لوگ جب ا = ۱۰ + لوگ طا − لوگ طس

بحکم (۴۷ ش ام) کی طب² = طس² − طا² = (طس + طا)(طس − طا)

دونو طرف کی لوگارثم لو تو

۲ لوگ طب = لوگ (طس + طا) + لوگ (طس − طا)

مثال

طا = ۱۲۱٫۴ اور طس = ۱۴۷ معلوم ہیں ا اور ب اور طب مطلوب ہیں

۱۰ + لوگ ۱۲۱٫۴ = ۱۱٫۱۲۰۵۷

لوگ ۱۴۷ = ۲٫۱۰۳۸۰

لوگ جب ا = ۹٫۰۱۶۷۷

لوگ ۵° ۵۷′ = ۹٫۰۱۵۶۱

تفاوت جدول = ۱۲۱ $\frac{۱۱۶ \times ۶۰}{۱۲۱}$ = ۵۷″

ا = ۵° ۵۷′ ۵۷″

ب = ۸۴° ۲′ ۳″

طب کو دریافت کرو

طس + طا = ۱۴۰٫۲ طا − طس = ۱۱۳٫۸

لوگ ۱۴۰٫۲ = ۲٫۱۴۶۷۵

لوگ ۱۱۳٫۸ = ۲٫۰۵۶۱۴

۲ لوگ طب = ۲٫۰۹۰۲۶۴۱

طب = ۱۲۳٫۳۶

امثلہ مشق ۹

(۱) طا = ۵۱۲ اور طس = ۱۰۰۷ معلوم ہین ا اور ب مطلوب ہین

(۲) طا = ۳۲،۷۱۲ اور طس = ۹۶،۲ معلوم ہین ا اور ب مطلوب ہین

(۳) طا = ۱۴۳ اور طس = ۱۵۷ معلوم ہین ا اور ب اور طب مطلوب ہین

(۴) طا = ۵۷۶ اور طس = ۸۸۰ معلوم ہین ا اور ب مطلوب ہین

(۵) طا = ۲۱،۷ اور طس = ۵۴،۳۱ معلوم ہین ا اور ب مطلوب ہین

صورت سوم

طا اور ا معلوم ہین ب اور طب اور طس مطلوب ہین

بموجب شکل اول کے

طا = طس جب ا

جس سے لوگ طس = ۱۰ + لوگ طا - لوگ جب ا

بموجب شکل دوم کے

طا = طب س ا

جس سے لوگ طب = ۱۰ + لوگ طا - لوگ س ا

امثلہ مشق ۱۰

(۱) طا = ۱۳ اور ا = ۳۵° ۲۰′ معلوم ہین ب اور طب اور طس مطلوب ہین

(۲) طا = ۱۱۵۷ اور ب = ۵۸° ۳۰′ ۲۷″ معلوم ہین ا اور طب اور طس

(۳) طا = ۸۲۵ اور ب = ۵۶° معلوم ہین ا اور طب اور طس دریافت کرو

(۴) طا = ۱۴۲۶ اور ا = ۳۰° ۲۱′ معلوم ہین اور طب اور طس مطلوب ہین

(۵) طا = ۳۸،۷۵ اور ا = ۱۷° ۴۰′ ۳۰″ معلوم ہین ب اور طب اور طس مطلوب ہین

صورت چہارم

طس اور ا معلوم ہین اور طا اور طب اور ب مطلوب ہین

بموجب شکل اول طا = طس حا ا

طب = طس حم ا

جس سے لوگ طا = لوگ طس + لوگ جیب ا − ۱۰

لوگ طب = لوگ طس + لوگ حم ا − ۱۰

امثلۂ مشق (۱۱)

(۱) طس = ۱۰۰ اور ا = ۳۹° ۴۸′ معلوم ہین قیمت ب اور طا اور طب مطلوب ہین

(۲) طس = ۱۷۶۰ اور ب = ۲۲° ۰۳′ ۵۶″ 〃 قیمت ا اور طا اور طب 〃

(۳) طس = ۲۸۳۴۷ اور ا = ۱۸° ۰۵′ ۲۲″ 〃 ب اور طا اور طب 〃

(۴) طس = ۱۸۹۷۳ اور ا = ۳۱° ۲۱′ ۰۶″ 〃 ب اور طا اور طب 〃

(۵) طس = ۱۰۱۳ اور ب = ۱۰° 〃 ا اور طا اور طب 〃

باب چہارم

قوانین علم مثلثی

(۱) اشکال اصولی (۲) اصول قوانین اربعہ (۳) قانون مجموعہ اور تفاوت جیبون اور جیب التمامون کے

(۴) دو چند زاویہ کی جیب اور جیب تمام کی قیمت زاویہ کی جیب اور جیب التمام کی رقمون مین

(۵) جیب اور جیب التمام زاویہ کی قیمت نصف زاویہ کی جیب اور جیب تمام کی رقمون مین

(۶) تین زاویون کے مجموعہ کی جیب اور جیب التمام اور مماس کا قانون

(۷) سہ چند زاویہ کی جیب اور جیب تمام اور مماس کا قانون

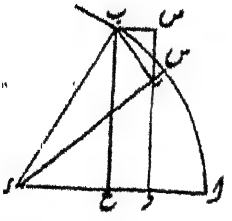
اول اشکال اصولی اس باب مین دو یا زیادہ زاویون کے مجموعہ اور تفاوت کے جیب اور جیب التمام اور مماس کے ارتباطات باہمی کی تحقیقات کرین گے اس ساری تحقیقات کا مدار چار اشکال اصولی پر ہے اور ان شکلون کا استنباط اسطرح ہے

شکل اول

دعوی اگر دو زاویوں سے ایک زاویہ کی جیب کو دوسرے کے جیب تمام میں ضرب دیں اور دوسرے زاویہ کی جیب کو پہلے زاویہ کی جیب تمام میں ضرب دیں تو مجموعہ ان حاصل ضربوں کا برابر اون دونو زاویوں کی جیب کے ہوگا

بیان دعوی فرض کرو کہ ا اور ب زاویے ہوں تو

جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب



عمل شکل د کے مرکز اور کسی طول د ا کے نصف قطر پر دائرہ بناؤ ۔

اور د س = د ا کے اور س د ب = ب بناؤ ۔

اور ب سے ا د اور د س پر عمود ب ع اور ب ر لگا لو اور ر سے ر د عمود د ا پر لگا لو اور

اور ب سے ب ص عمود ر د ممدودہ پر لگا لو ۔

اثبات چونکہ زاویہ ر ب ع قائمہ ہے تو زاویہ ب ر ص تمامی زاویہ ا ر د کے ہے

اسیواسطے برابر ر د = د ا کے چونکہ ب ع برابر ہے ص د کے

تو ب ع = د ر + ر ص

ہر ایک طرف کو د ب پر تقسیم کرو $\frac{\text{ب ع}}{\text{د ب}} = \frac{\text{د ر}}{\text{د ب}} + \frac{\text{ر ص}}{\text{د ب}}$

اسیواسطے $\frac{\text{ب ع}}{\text{د ب}} = \frac{\text{د ر}}{\text{د ر}} \times \frac{\text{د ر}}{\text{د ب}} + \frac{\text{ر ص}}{\text{ب ر}} \times \frac{\text{ب ر}}{\text{د ب}}$

اور مثلثات قائم الزاویہ د ب ر اور د ر د اور د ع ب اور ص ب ر میں +

بموجب شکل اول باب سوم کے

$\frac{\text{ب ع}}{\text{د ب}} = \text{جب (ا + ب)}$

$\frac{\text{د ر}}{\text{د ب}} = \text{جب ا}$ $\frac{\text{د ر}}{\text{د ب}} = \text{جم ب}$

$\frac{\text{ر ص}}{\text{ب ر}} = \text{جم ا}$ $\frac{\text{ب ر}}{\text{د ب}} = \text{جب ب}$

اخیر مساوات مین ان قیمتون کو نسبتون کی جگہہ رکھنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

حب (ا + ب) = جیب ا جم ب + جم ا جیب ب فہو المراد

نتیجہ اگر ا = ب تو یہہ حاصل ہوگا کہ

جیب ۲ا = جیب ا جم ا + جم ا جیب ا

جیب ۲ا = ۲ جیب ا جم ا

یعنے دوچند زاویہ کی جیب برابر ہوتی ہے دوچند حاصل ضرب جیب اور جیب التمام اوس زاویہ کے

دوسری شکل

دعوی اگر دو زاویئے ہون تو اون دونو زاویون کی جیب التمامون کے حاصل ضرب مین سے اون کی جیبون کے حاصل ضرب کو تفریق کرین تو حاصل تفریق یہہ اون زاویونکے مجموعہ کے جیب التمام کے ہوگا

بیان دعوی فرض کرو کہ ا اور ب زاویئے ہین تو

جم (ا + ب) = جم ا جم ب - جیب ا جیب ب

عمل شکل شکل اوسیطرح بناؤ جسطرح پہلے بنائی تہی

اثبات چونکہ ع ر برابر ہے ب ص کے تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ

ع د = ر د - ب ص

اسیواسطے ع د / ب ج = ر د / ب ج - ب ص / ب ج

اسیواسطے ع د / ب ج = ر د / ب ر × ب ر / ب ج - ب ص / ب ر × ب ر / ب ج

ان نسبتونکی جگہہ اونکی قیمتین علم مثلثی جلو مین کہو اور ان علم مثلثی جلو نکا ذکر اول شکل باب سوم مین ہوا ہے تو یہہ حاصل ہوگا جم (ا + ب) = جم ا جم ب - جیب ا جیب ب فہو المراد

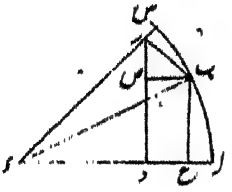
نتیجہ اگر ا = ب تو یہہ حاصل ہوگا کہ

جم ۲ا = جم ۲ا - جیب ۲ا

یعنے دو چند زاویہ کی جیب تمام برابر ہوتی ہے اوسکی جیب تمام کے مربع اور جیب کے مربع کے حاصلتفریق کے

تیسری شکل

دعوی اگر دو زاویے ہون اونمین ایک زاویہ کی جیب کو دوسرے زاویہ کی جیب مین ضرب دین اور حاصل ضرب مین سے پہلے زاویہ کی جیب تمام اور دوسرے زاویہ کی جیب کے حاصل ضرب کو تفریق کرین تو ماحصل جیب اون دونو زاویون کی تفاوت کے ہوگی



بیان دعوی فرض کرو کہ ا اور ب زاویے ہون تو

جیب (ا - ب) = جیب ا جم ب - جم ا جیب ب

عمل شکل ر کے مرکز اور کسی طول ر ا کی نصف قطر پر دائرہ کھینچو اور ا س = ا اور

س ب = ب کے بناؤ اور نقطہ ب سے ر ا اور ر س پر عمود ب ع اور ب د نکالو اور ر سے ر د عمود ر ا پر نکالو اور نقطہ ب سے ب ص عمود ر د پر نکالو

اثبات بموجب عمل شکل کے ب ص اور ر د مین سے ہر ایک تمامی زاویہ ر د کے ہے اسواسطے وہ آپسمین برابر ہین اور اسلئے زاویہ ب ر ص = ا اور

ب ع = د ر - ر ص

اسیواسطے $\frac{\text{ب ع}}{\text{ر ب}} = \frac{\text{د ر}}{\text{ر ب}} - \frac{\text{ر ص}}{\text{ر ب}}$

اسیواسطے $\frac{\text{ب ع}}{\text{ر ب}} = \frac{\text{د ر}}{\text{ر ب}} \times \frac{\text{ر ب}}{\text{ر ا}} - \frac{\text{ر ص}}{\text{ر ا}} \times \frac{\text{ر ب}}{\text{ر ب}}$

ان نسبتون کی جگہ اونکی علم مثلثی قیمتون کے رکھنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

جیب (ا - ب) = جیب ا جم ب - جم ا جیب ب فہو المراد

چوتھی شکل

دعوی اگر دو زاویے ہون تو اونکے جیب اتمامون کا حاصل ضرب اور جیبون کا حاصل ضرب ملکر برابر ہوگا دونو زاویون کے تفاوت جیب اتمام کے

بیان دعوی فرض کرو کہ ا اور ب زاویے ہون تو

جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب

عمل شکل آخر شکل کی طرح شکل بناؤ

اثبات چونکہ د ر برابر ہے ب ص کے تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ

ع = د ر + ب ص

اسیواسطے $\frac{ع}{ب} = \frac{د}{ب} + \frac{ب ص}{ب}$

اسیواسطے $\frac{ع}{ب} = \frac{د}{ر} \times \frac{ر}{ب} + \frac{ب ص}{ب ر} \times \frac{ب ر}{ب}$

ان نسبتون کی جگہہ اونکے علم مثلثی قیمتین رکھنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

جم (ا - ب) = جم ا جم + جب ا جب ب فہو المراد

(۲) چار اصولی قوانین مثلثی چونکہ تمام دعوی علم مثلث بالجبر کے انہین چارون شکلون پر مبنی ہین اسواسطے اونکو اصول قوانین مثلثی کہتے ہین اب ان سب کو یکجا کرکے لکھتے ہین

حس (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا حس ب (۱)

جم (ا + ب) = جم ا جم ب - حس ا حس ب (۲)

حس (ا - ب) = حس ا جم ب - جم ا جب ب (۳)

جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا حس ب (۴)

پانچوین شکل

دعوی اگر دو زاویے ہون اور اونکے مماسونکی حاصل جمع کو ایک منفی حاصل ضرب مماسون پر تقسیم کرین تو اونکے مجموعہ کا مماس حاصل ہوگا

بیان دعوی فرض کرو کہ ا اور ب زاویے ہین تو

مس (ا + ب) = $\frac{مس ا + مس ب}{1 - مس ا مس ب}$

اثبات اگر ہم اول قانون مثلثی کی صورت کو دوسرے قانون مثلثی کی صورت پر تقسیم کرین تو یہہ حاصل ہوگا:

$$\text{مس}(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{جب ا جم ب} + \text{جم ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب} - \text{جب ا جب ب}}$$

جانب راست کے شمار کنندہ اور نسب نما کو جم ا جم ب پر تقسیم کرو

$$\text{مس}(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}}{1 - \frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} \cdot \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}}$$

اسواسطے $\text{مس}(\text{ا}+\text{ب}) = \frac{\text{مس ا} + \text{مس ب}}{1 - \text{مس ا مس ب}}$ فہو المراد

نتیجہ اگر ا = ب تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا

$$\text{مس ۲ا} = \frac{\text{۲ مس ا}}{1 - \text{مس}^2\text{ ا}}$$

یعنے دوچند مماس کو ایک منفی مربع مماس پر تقسیم کرین تو دوچند زاویہ کا مماس حاصل ہوتا ہے

چھٹی شکل

دعوی اگر دو زاویے ہون اور اونکے مماسون کی حاصل تفریق کو ایک جمع مماسونکے حاصل ضرب پر تقسیم کرین تو اونکے حاصل تفریق کا مماس حاصل ہوگا

بیان دعوی فرض کرو کہ ا اور ب زاویے ہین تو

$$\text{مس}(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{مس ا} - \text{مس ب}}{1 + \text{مس ا مس ب}}$$

اثبات اگر ہم صور قوانین مین سے تیسرے کو چوتھے پر تقسیم کرین:

$$\text{مس}(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{جب ا جم ب} - \text{جم ب جب ب}}{\text{جم ا جم ب} + \text{جب ا جب ب}}$$

شمار کنندہ اور نسب نما کو جم ا جم ب پر تقسیم کرین اور اختصار کرین تو یہہ حاصل ہوگا

$$\text{مس}(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{مس ا} - \text{مس ب}}{1 + \text{مس ا مس ب}}$$

(۳) قوانین جیبون اور جیب تمامون کی حاصل جمع و حاصل تفریق کے

صور قوانین اصولے کی جمع اور تفریق کرنے سے یہہ جملے بیانیہ جیبون اور جیب التمامون کی حاصل جمع اور حاصل تفریق کے لئے حاصل ہون گے ؛

جیب (ا+ب) + جب (ا − ب) = ۲ جیب ا جم ب (۵)

جیب (ا + ب) − جب (ا − ب) = ۲ جم ا جیب ب (۶)

جم (ا+ ب) + جم (ا − ب) = ۲ جم ا جم ب (۷)

جم (ا+ ب) − جم (ا − ب) = − ۲ جیب ا جیب ب (۸)

بہت سیدہے سادے طور پر ان قوانین کی صورت بدلنے سے چار اور قوانین دو زاویونکے جیب اور جیب التمام کے مجموعے اور حاصل تفریق کے لئے حاصل ہونگے ؛

فرض کرو کہ اَ = ا + ب اور بَ = ا − ب تو جمع اور تفریق سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ا = ½ (اَ + بَ) اور ب = ½ (اَ − بَ)

اب ہم اوپر کی مساوات (۵) مین ان قیمتون کو رکھین تو یہہ حاصل ہوگا

جیب اَ + جیب بَ = ۲ جیب ½ (اَ + بَ) جم ½ (اَ − بَ)

اور یہہ صورت بیانیہ ہے مخصوص اَ اور بَ کی کسی خاص قیمت کے ساتھہ نہین ہے اسلئے وہ ا اور ب کے لئے بھی درست اور صحیح ہے اسواسطے ہم زبر ان حرفون پر اڑا سکتے ہین اور اس سبب سے طریقہ کتابت صور علم مثلث کا یکسان ہو جائے گا

اور علی ہذا القیاس اسی کے مشابہ مساوات (۶) اور (۷) اور (۸) سے یہہ مجموعہ مساواتون کا حاصل ہو سکتا ہے کہ

جیب ا + جیب ب = ۲ جب ½ (ا + ب) جم ½ (ا − ب) (۹)

جیب ا − جیب ب = ۲ جم ½ (ا + ب) جیب ½ (ا − ب) (۱۰)

جم ا + جم ب = ۲ جم ½ (ا + ب) جم ½ (ا − ب) (۱۱)

جم ا − جم ب = − ۲ جیب ½ (ا + ب) جب ½ (ا − ب) (۱۲)

ساتوین شکل

دعوی کسی دو زاویون کے جیبون کے مجموعہ کو اونکے جیبون کے حاصل تفریق سے وہ نسبت ہوتی ہے جو اون زاویونکے نصف مجموعہ کے مماس کو اون زاویونکے نصف حاصل تفریق کے مماس سے نسبت ہے

بیان دعوی فرض کرو کہ ا اور ب زاویئے ہون تو

جب ا+جب ب : جب ا- جب ب :: مس ½ (ا+ب) : مس ½ (ا- ب)

اثبات اگر آخر مجموعہ مساوتون مین اول کو دوم پر تقسیم کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{جب ا+جب ب}}{\text{جب ا- جب ب}} = \frac{\text{۲ جب ½ (ا+ب) جم ½ (ا- ب)}}{\text{۲ جم ½ (ا+ب) جب ½ (ا- ب)}}$$

اسواسطے باب (دوم کی (۴) اور (۵) مساوات کے موافق

$$\frac{\text{جب ا+جب ب}}{\text{جب ا- جب ب}} = \text{مس ½ (ا+ب) مم ½ (ا- ب)}$$

اور چونکہ مم ½ (ا- ب) مکافی مس (ا- ب) کا ہے اسواسطے

$$\frac{\text{جب ا+جب ب}}{\text{جب ا- جب ب}} = \frac{\text{مس ½ (ا+ب)}}{\text{مس ½ (ا- ب)}}$$

اور اس مساوات کو جب تناسب یا تماثل کے طور پر بیان کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

جب ا+جب ب : جب ا- جب ب :: مس ½ (ا+ب) : مس ½ (ا- ب) فہو المراد

(۴) کسی دو چند زاویہ کی جیب اور جیب التمام کی قیمتون کا بیان اوس زاویہ کی جیب اور جیب التمام مین

بموجب نتیجہ شکل اول کے

جب ۲ا = ۲ جب ا جم ا (۱۳)

بموجب مساوات (۱) باب دوم کے

۱ = جم ا + جب ا

بموجب نتیجہ دوم کے

جم ۲ا = جم² ا − جیب² ا

ان مساواتون کو جمع اور تفریق کرو تو

۱ + جم ۲ا = ۲ جم² ا (۱۴)

۱ − جم ۲ا = ۲ جیب² ا (۱۵)

عمل انتقال سے دوچند زاویہ کی جیب التمام کے واسطے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

جم ۲ا = ۱ − ۲ جیب² ا (۱۶)

جم ۲ا = ۲ جم² ا − ۱ (۱۷)

۵ کسی زاویہ کی جیب اور جیب التمام کی قیمت نصف زاویہ کی جیب اور جیب التمام کی رقمون مین

ان مساواتون مین اگر بائین طرف ۲ا کے بجائے ا کے رکھین تو دائین طرف ا کی جگہ ½ ا رکھنا چاہیئے اسواسطے

جیب ا = ۲ جیب ½ ا جم ½ ا (۱۸)

۱ + جم ا = ۲ جم² ½ ا (۱۹)

۱ − جم ا = ۲ جیب² ½ ا (۲۰)

جم ا = ۲ جم² ½ ا − ۱ (۲۱)

جم ا = ۱ − ۲ جیب² ½ ا (۲۲)

(۶) تین زاویون کے مجموعہ کی جیب اور جیب التمام اور مماس کی صورتین

بموجب شکل اول کے ہمکو یہہ حاصل ہے کہ

جیب (ا + ب + س) = جیب (ا + ب) جم س + جم (ا + ب) جیب س

= (جیب ا جم ب + جم ا جیب ب) جم س + (جم ا جم ب − جیب ا جیب ب) جیب س

= جیب ا جم ب جم س + جیب ب جم ا جم س + جیب س جم ا جم ب − جیب ا جیب ب جیب س (۲۳)

بموجب شکل دوم کے

جم (ا + ب + س) =

جم (ا + ب) جم س - جیب (ا + ب) جیب س =

(جم ا جم ب - جیب ا جیب ب) جم س - (جیب ا جم ب + جم ا جیب ب) جیب س =

جم ا جم ب جم س - جم ا جیب ب جیب س - جم ب جیب س جیب ا - جم س جیب ا جیب ب (۲۴)

جیب ا کے جملہ کو جم کے جملہ پر تقسیم کرنے سے اور شمار کنندہ اور نسب نما دونو کو جم ا جم ب جم س پر تقسیم کرنے سے تین زاویون کے مجموعے کے مماس کی صورت بیانیہ یہہ حاصل ہوگی

مس (ا + ب + س) =

$$\frac{\text{مس ا + مس ب + مس س - مس ا مس ب مس س}}{\text{۱ - مس ا مس ب - مس ب مس س - مس س مس ا}} \quad (۲۵)$$

(۷) سہ چند زاویہ کی جیب اور جیب اتمام اور مماس کی صور مثلثی

اگر ہم اخیر تین صورتون مین ا = ب = س کے فرض کرین تو یہہ ہمکو حاصل ہوگا

جیب ۳ ا = ۳ جیب ا - ۴ جیب³ ا (۲۶)

جم ۳ ا = ۴ جم³ ا - ۳ جم ا (۲۷)

$$\text{مس ۳ ا} = \frac{\text{۳ مس ا - مس}^{3}\text{ ا}}{\text{۱ - ۳ مس}^{2}\text{ ا}} \quad (۲۸)$$

پانچوان باب

صور علم مثلثی کی تبدیل صورت

علم مثلث بالجبر کے قوانین اصولی کی صورتین ہمنے تحریر کین اور اولنسی اور صور قوانین مستنبط لیین اور صور قوانین سے ہمیشہ اور صورتین مستنبط ہوا کرتی ہین اسباب مین ہم اس امر کی مثالین لکھین گے اور مثال مین بتلائین گے کہ کونسی ترکیبین تبدیل صورت مین مستعمل ہوتی ہین ۔

تحویل قوانین علم مثلثہ

(۱) مس ا + مم ا کو ایک مفرد جملہ علم مثلثی مین بیان کرو

$$\text{مس ا} + \text{مم ا} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}}$$

$$= \frac{\text{جب}^2\text{ ا} + \text{جم}^2\text{ ا}}{\text{جم ا جب ا}} = \frac{1}{\text{جم ا جب ا}}$$

$$= \frac{2}{2\text{ جب ا جم ا}} = \frac{2}{\text{جب}2\text{ ا}} = 2\text{ قم } 2\text{ ا}$$

(۲) $\frac{\text{جب ا}}{1+\text{جم ا}}$ کو ایک مفرد جملہ علم مثلثی مین بیان کرو

$$\frac{\text{جب ا}}{1+\text{جم ا}} = \frac{2\text{ جب}\frac{1}{2}\text{ ا جم}\frac{1}{2}\text{ ا}}{2\text{ جم}^2\frac{1}{2}\text{ ا}} = \text{مس}\frac{1}{2}\text{ ا}$$

(۳) $\frac{1-\text{جم ا}}{\text{جب ا}}$ کو ایک مفرد جملہ علم مثلثی مین بیان کرو

$$\frac{1-\text{جم ا}}{\text{جب ا}} = \frac{2\text{ جب}^2\frac{1}{2}\text{ ا}}{2\text{ جب}\frac{1}{2}\text{ ا جم}\frac{1}{2}\text{ ا}} = \text{مس}\frac{1}{2}\text{ ا}$$

(۴) $\frac{\text{جم ا}}{1+\text{جب ا}}$ کو مفرد جملہ علم مین بیان کرو +

$$\frac{\text{جم ا}}{1+\text{جب ا}} = \frac{\text{جب}(90^\circ - \text{ا})}{1+\text{جم}(90^\circ - \text{ا})} = \text{مس}(45^\circ - \frac{1}{2}\text{ ا})$$

(۵) قم ا + مم ا کو مفرد جملہ علم مثلثی کی طرف تحویل کرو

$$\text{قم ا} + \text{مم ا} = \frac{1+\text{جم ا}}{\text{جب ا}} = \text{مم}\frac{1}{2}\text{ ا}$$

(۶) $\frac{1+\text{مم}^2\text{ ا}}{2\text{ مم ا}}$ کو مفرد جملہ علم مثلثی کیطرف تحویل کرو

$$\frac{1+\text{مم}^2\text{ ا}}{2\text{ مم ا}} = \frac{\text{قم}^2\text{ ا}}{2\text{ مم ا}} = \frac{\text{جب ا}}{2\text{ جب}^2\text{ ا جم ا}}$$

$$= \frac{1}{2\text{ جب ا جم ا}} = \frac{1}{\text{جب}2\text{ ا}} = \text{قم}2\text{ ا}$$

(۷) قط ا + مس ا کو ایک مفرد جملہ علم مثلثی کیطرف تحویل کرو

$$\text{قط ا} + \text{مس ا} = \frac{1+\text{جب ا}}{\text{جم ا}}$$

$$= \frac{1-\text{جم}(90^\circ + \text{ا})}{\text{جب}(90^\circ + \text{ا})} = \text{مس}(45^\circ + \frac{1}{2}\text{ ا})$$

(۸) جب ا + مس $\frac{1}{2}$ ا کو ایک مفرد جملہ علم مثلثی کی طرف تحویل کرو

$$\text{جب ا} + \text{مس}\frac{1}{2}\text{ ا} = 2\text{ جب}\frac{1}{2}\text{ ا جم}\frac{1}{2}\text{ ا مس}\frac{1}{2}\text{ ا}$$

$$= 2\text{ جب}^2\frac{1}{2}\text{ ا} + 1 - \text{جم ا} = \text{جب ا}$$

(۹) جم^{۴} ا − جب^{۴} ا کو ایک مفرد جملہ علم مثلثی کیطرف تحویل کرو

جم^{۴} ا − جب^{۴} ا = (جم^{۲} ا + جب^{۲} ا) (جم^{۲} ا − جب^{۲} ا)

= جم^{۲} ا − جب^{۲} ا = جم ۲ ا

(۱۰) $\frac{\text{جب ا + جب ۳ ا}}{\text{جم ا + جم ۳ ا}}$ کی تحویل ایک مفرد جملہ علم مثلثی کی طرف تحویل کرو

بموجب سوالات (۹) اور (۱۱) باب چہارم کے

شمار کنندہ = ۲ جب ۲ ا جم ا

نسب نما = ۲ جم ۲ ا جم ا

اسواسطے $\frac{\text{جب ا + جب ۳ ا}}{\text{جم ا + جم ۳ ا}}$ = مس ۲ ا

(۱۱) $\frac{\text{جم ا + مس ا}}{\text{جم ا − مس ا}}$ کو جملہ مفرد بناؤ

شمار کنندہ = $\frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}}$ + $\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}}$ = $\frac{\text{جم}^{۲}\text{ ا + جب}^{۲}\text{ ا}}{\text{جب ا جم ا}}$

نسب نما = $\frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}}$ − $\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}}$ = $\frac{\text{جم}^{۲}\text{ ا − جب}^{۲}\text{ ا}}{\text{جب ا جم ا}}$

اور جم^{۲} ا + جب^{۲} ا = ۱ اور جم^{۲} ا − جب^{۲} ا = جم ۲ ا

تو تقسیم سے یہہ حاصل ہوگا ؛

$\frac{\text{جم ا + مس ا}}{\text{جم ا − مس ا}}$ = $\frac{۱}{\text{جم ۲ ا}}$ = قط ۲ ا

(۱۲) $\frac{\text{جب ا + جب ۳ ا + جب ۵ ا}}{\text{جم ا + جم ۳ ا + جب ۵ ا}}$ کو جملہ مفرد بناؤ

باب چہارم کی مساوات (۹) اور (۱۱) کو اول اور آخر ارقام شمار کنندہ اور نسب نما میں استعمال کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

شمار کنندہ = جب ۳ ا (۱ + ۲ جم ۲ ا)

نسب نما = جم ۳ ا (۱ + ۲ جم ۲ ا)

اسیواسطے تقسیم کرنے سے

$\frac{\text{جب ا + جب ۳ ا + جب ۵ ا}}{\text{جم ا + جم ۳ ا + جب ۵ ا}}$ = مس ۳ ا

(۱۳) اس مساوات کو ثابت کرو

جب (ا + ب) جب (ا − ب) = جب² ا − جب² ب

اگر باہم مساوات (۱) اور (۳) باب چہارم کو بجائے جب (ا + ب) اور جب (ا − ب) کی ضرب دین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

جب (ا + ب) جب (ا − ب) = جب² ا جم² ب − جم² ا جب² ب

= جب² ا (۱ − جب² ا) − (۱ − جب² ا) جب² ب

= جب² ا − جب² ب

(۱۴) اس مساوات کو ثابت کرو کہ

جم (ا + ب) جم (ا − ب) = جم² ا − جب² ب

جم (ا + ب) اور جم (ا − ب) کی صورت مفصلہ کو باہم ضرب دو اور جم² ب کی جگہ اوس کی قیمت ۱ − جب² ب اور جب² ا کی جگہ اوسکی قیمت ۱ − جم² ا رکھو تو مساوات ثابت ہوجائے گی

(۱۵) اس مساوات کو ثابت کرو

$$\text{مس}^2 \text{ا} - \text{مس}^2 \text{ب} = \frac{\text{جب (ا + ب) جب (ا − ب)}}{\text{جم}^2 \text{ا جم}^2 \text{ب}}$$

$$\text{مس}^2 \text{ا} - \text{مس}^2 \text{ب} = (\text{مس ا} + \text{مس ب})(\text{مس ا} - \text{مس ب})$$

$$\text{مس ا} + \text{مس ب} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}} = \frac{\text{جب ا جم ب} + \text{جم ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب}}$$

$$= \frac{\text{جب (ا + ب)}}{\text{جم ا جم ب}}$$

اور اسیطرح $\text{مس ا} - \text{مس ب} = \frac{\text{جب (ا − ب)}}{\text{جم ا جم ب}}$

اب ضرب کرنے سے

$$\text{مس}^2 \text{ا} - \text{مس}^2 \text{ب} = \frac{\text{جب (ا + ب) جب (ا − ب)}}{\text{جم}^2 \text{ا جم}^2 \text{ب}}$$

(۱۶) مساوات ا جب لہ + ب جم لہ = ج کو حل کرو

ا جب لا − ج = − ب جم لا

(ا جب لا − ج)² = ب² جم² لا = ب² (۱ − جب² لا)

اس مساوات کو مختصر کرکے ہم یہہ مساوات درجۂ دوم جب لا کی حل کرتے ہین

(ا² + ب²) جب² لا − ۲ ا ج جب لا − (ب² − ج²) =

اور اسکی قیمت یہہ ہے کہ

$$\text{جب لا} = \frac{\text{ا ج} \pm \text{ب} \sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{ج}^2}}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}.$$

قیمت لا کی اس مساوات سے بذریعۂ زاویۂ مستعان صہ کے بھی اسطرح حاصل ہوسکتی ہے کہ فرض کرو صہ ایسا زاویہ ہے کہ ب = ا مس صہ اس قیمت کی مساوات مفروض مین رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ا (جب لا + جم لا مس صہ) = ج

ہر ایک طرف مساوات کو جم صہ مین ضرب دو تو

ا (جب لا جم صہ + جم لا جیب صہ) = ج جم صہ

یعنے ا جیب (لا + صہ) = ج جم صہ

اس قیمت لا + صہ کی معلوم ہوگی اور صہ بالفعل ہمکو مساوات ب = ا مس صہ سے دریافت ہوسکتا ہے

(۱۷) مساوات ا مس لا = ب جم لا کو حل کرو

طرفین مساوات کو جم لا مین ضرب دو. تو

ا جیب لا = ب جم لا = ب (۱ − جیب² لا)

اسیواسطے جیب² لا + $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ جیب لا − ۱ = ۰

$$\text{جب لا} = \frac{-\text{ا} \pm \sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}}{\text{ب}}$$

(۱۸) ذیل مساوات کو حل کرو

جب لا + جب ی = ا

جم لا + جم ی = ب

مساوات (۹) اور (۱۱) باب چہارم سے

۲ جب ½ (لا+ی) جم ½ (لا−ی) = ا

۲ جم ½ (لا+ی) جم ½ (لا−ی) = ب

اسواسطے تقسیم کرنے سے مس ½ (لا+ی) = ا/ب

ہر مساوات کو مجذور کرنے سے اور پھر اونکو جمع کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

جم² ½ (لا−ی) = ¼ (ا² + ب²)

پس جب قیمتین ½ (لا+ی) اور ½ (لا−ی) کی دریافت ہوگئین تو مقادیر لا اور ی کی جمع اور تفریق کرنے سے معلوم ہوسکتی ہین

چھٹا باب

مثلثات غیر قائم الزاویہ

(۱) اضلاع اور زاویونکے ارتباطات (۲) جیب التمام زاویونکی اضلاع کی ارقام مین

(۳) جیب زاویونکی اضلاع کی رقمون مین (۴) نصف زاویون کی جیب اور جیب التمام اور مماس

(۵) رقبہ مثلث کا اضلاع کی رقمون مین (۶) مثلثات مستوی کی پانچ صورتین

(۱) اضلاع اور زاویون کے ارتباطات

مثلثات غیر قائم الزاویہ کے حل کرنے کے واسطے ضرور ہے کہ بعض اشکال اور قوانین کو ثابت اور قائم کرین جنسے کہ اضلاع اور زاویونکی علم مثلثی جملون کا باہمی ربط ظاہر ہو

شکل اول

دعوی مثلث کے دو ضلعون مین وہ نسبت ہوتی ہے جو اون کے مقابل کے زاویونکی جیب مین

بیان دعوی فرض کرو کہ دو ضلعے ط اور ب اور اونکے مقابل کے زاویے

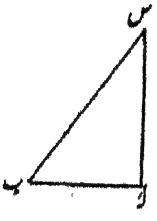
ا اور ب ہین تو

طا : طب :: جب ا : جب ب

صورت اول

اگر ایک زاویہ قائمہ ہو

عمل شکل ایک مثلث قائم الزاویہ اس ب ایسا مرتسم کرو جیسا کہ یہہ کہیجا ہوا ہے اور فرض کرو کہ زاویہ س ا ب = ا اور س ب ا = ب اور اون کے مقابل کے ضلعے طا اور طب ہین



اثبات بموجب شکل باب سوم کے

طب = طا جیب ب

طا : طب :: ا : جیب ب

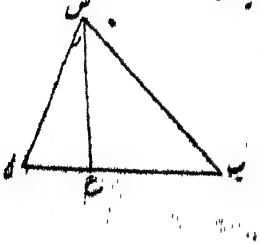
لیکن ا زاویہ قائمہ ہے اسواسطے جیب ا = ا اور اسیواسطے

طا : طب :: جب ا : جب ب فہو المراد

صورت دوم

اگر دو زاویئے حادّے ہون

عمل شکل مثلث ا ب س غیر قائم الزاویہ ایسا بناؤ جیسا کہ یہہ بنا ہوا ہے اور س ع عمود ا ب پر ڈالو اور ب س = طا اور ا س = طب اور س ا ب = ا اور س ب ا = ب کے بناؤ



اثبات مثلثات قائم الزاویہ ا س ع اور ب س ع مین بموجب شکل اول باب سوم کے

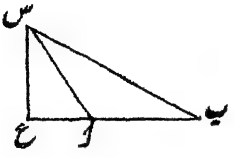
س ع = طب جیب ا اور س ع = طا جیب ب

اس واسطے طا جیب ب = طب جیب ا

یعنے طا : طب :: جیب ا : جیب ب

صورت سوم

اگر ایک زاویہ حادہ ہو



عمل شکل مثلث اس ب ایسا بناؤ جیسا کہ یہ بنا ہوا ہے جسکا زاویہ ا منفرجہ ہے س ع عمود اب ممدودہ پر نکالو

اثبات مثلث س ع ا مین س ع = س ا جب س ا ع

اور س ا ع تکملہ س ا ب یا ا کا ہے اسواسطے

س ع = طب جیب ا

اور نیز مثلث س ع ب قائم الزاویہ مین س ع = طا جیب ب

اسیواسطے طا جیب ب = طب جیب ا

یعنے طا : طب :: جیب ا : جیب ب فہو المراد

اضلاع اور اونکی مقابل کے زاویون کی جیبون مین جو تناسب ہوتا ہے اوسکو قاعدۂ جیوب کہتے ہین

دوسری شکل

دعوی مثلث مستوی مین مجموعہ اضلاع کو تفاوت اضلاع سے وہ نسبت ہوتی ہے جو فوق القاعدہ کے زاویون کے نصف مجموعہ کے مماس کو اونکی نصف تفاوت کے مماس سے نسبت ہے

بیان دعوی فرض کرو کہ اضلاع طا اور طب اور قاعدہ پر اونکی مقابل کے زاویے ا اور ب ہین تو

طا+طب : طا-طب :: مس ½ (ا+ب) : مس ½ (ا-ب)

اثبات موافق آخر شکل کے

طا : طب :: جب ا : جب ب

ترکیب اور تفصیل نسبت سے

طا + طب : طا - طب :: جب ا + جب ب : جب ا - جب ب

اسیواسطے بحکم ساتوین شکل باب چہارم کے

طا + طب : طا - طب :: مس ½ (ا + ب) : مس ½ (ا - ب) فہو المراد

تیسری شکل

دعوی مثلث مستوی مین قاعدہ کو مجموعہ اضلاع سے وہ نسبت ہوتی ہے جو زوایا فوق القاعدہ کے نصف مجموعہ کی جیب تمام کو اونکے نصف تفاوت کے جیب تمام سے اور نیز قاعدہ کو اضلاع کے تفاوت سے وہ نسبت ہوتی ہے جو زوایا فوق القاعدہ کے نصف مجموعہ کی جیب کو اون کے نصف تفاوت کی جیب سے

بیان دعوی فرض کرو کہ مثلث کے اضلاع اور قاعدہ طا اور طب اور طس اور اونکے مقابل کے زاویے ا اور ب اور س ہین

طس : طا + طب :: جم ½ (ا + ب) : جم ½ (ا - ب)

طس : طا - طب :: جب ½ (ا + ب) : جب ½ (ا - ب)

دعوی کا جزو اول

اثبات بموجب شکل اول کے اس سبب سے کہ (ا + ب) تکملہ س کا ہے

جیب (ا + ب) = جب س اور اس سے یہ مساواتین حاصل ہوتی ہین کہ

$$\frac{\text{طا}}{\text{طس}} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جب (ا + ب)}} \qquad \frac{\text{طب}}{\text{طس}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب (ا + ب)}}$$

جمع کرنے سے

$$\frac{\text{طا + طب}}{\text{طس}} = \frac{\text{جب ا + جب ب}}{\text{جب (ا + ب)}}$$

شمار کنندہ = ۲ جیب ½ (ا + ب) جم ½ (ا - ب) بموجب مساوات (۹) باب چہارم کے

اور نسب نما = ۲ جیب ½ (ا + ب) جم ½ (ا + ب) بموجب مساوات (۱۸) باب چہارم کے

اسیواسطے

$$\frac{\text{طا}+\text{طب}}{\text{طس}} = \frac{\text{جم}\frac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جم}\frac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})}$$

یعنے طس : طا+طب :: جم $\frac{1}{2}$ (ا+ب) : جم $\frac{1}{2}$ (ا−ب)

دعوی کا جزو دوم

اثبات تفریق کرنے سے ۔

$$\frac{\text{طا}-\text{طب}}{\text{طس}} = \frac{\text{جب ا}-\text{جب ب}}{\text{جب}(\text{ا}+\text{ب})}$$

اور اسیطرح قیمتون کے رکھنے سے

طس : طا−طب :: جب $\frac{1}{2}$ (ا+ب) : جب $\frac{1}{2}$ (ا−ب)

فہو المراد

چوتھی شکل

دعوی مثلث مستوی مین زاویۂ حادۂ یا منفرجہ مقابل کے ضلع کا مربع اوس زاویہ کے دو ضلعون کے مربعون کے مجموعہ سے بقدر دوچند سطح اون اضلاع اور اوس زاویہ کی جیب التمام کے کم ہوتا ہے

بیان دعوی فرض کرو کہ اضلاع مثلث کے طا اور طب اور طس اور اونکے مقابل کے زاویے ا اور ب اور س ہین تو

طا² = طب² + طس² − ۲ طب طس جم ا

طب² = طس² + طا² − ۲ طس طا جم ب

طس² = طا² + طب² − ۲ طا طب جم س

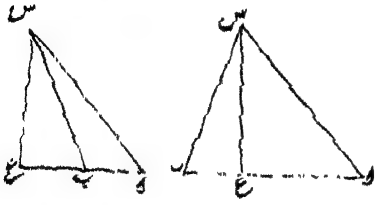
صورت اول

زاویہ حادہ ہو

مثلث غیر قائم الزاویہ

عمل شکل فرض کرو کہ ا زاویۂ حادہ ان مثلثوں میں سے ہر ایک میں ہے نقطہ س سے

س ع عمود ا ب پر لگاؤ



اثبات بحکم (۱۳ ش ۲ م) کے

ب س² = ا س² + ا ب² − ۲ ا ب × ا ع

اولی شکل باب سوم کے

ا ع = ا س جم ا

اس قیمت کو ا ع کی جگہہ رکھو اور طا اور طب اور طس بجائے ب س اور ا س اور ا ب کے لکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

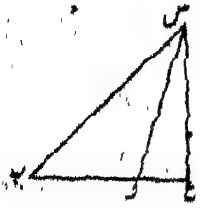
طا² = طب² + طس² − ۲ طب طس جم ا

صورت دوم

اگر مقابل کا زاویہ منفرجہ ہو

عمل شکل فرض کرو کہ اس مثلث میں زاویہ ا منفرجہ ہے

س سے عمود س ع ا ب خارج شدہ پر لگاؤ



اثبات بحکم (۱۲ ش ۲ م) کے

ب س² = ا س² + ا ب² + ۲ ا ب × ا ع

لیکن ا ع = ا س جم ع ا س کے اور چونکہ زاویے ع ا س اور ب ا س باہم تکملے ہیں اسواسطے اونکے جیب التمام متساوی ہیں مگر علامتیں اونکی مختلف ہیں اسواسطے

ا ع = − ا س جم ا

اس قیمت کے رکھنے سے ہمکو وہی حاصل ہوتا ہے جو پہلے حاصل ہو چکا ہے کہ

طا² = طب² + طس² − ۲ طب طس جم ا فھو المراد

(۲) زاویون کی جیب التمام کی قیمتین اضلاع کی رقمون مین

آخر شکل کی بیان دعوی سے زاویون کی جیب التمامون کی قیمت اضلاع کے رقمون مین بہ تفصیل ذیل دریافت ہونگین ؛

$$\left.\begin{aligned} \text{جم ا} &= \frac{\text{طب}^2 + \text{طس}^2 - \text{طا}^2}{2\,\text{طب طس}} \\ \text{جم ب} &= \frac{\text{طس}^2 + \text{طا}^2 - \text{طب}^2}{2\,\text{طس طا}} \\ \text{جم س} &= \frac{\text{طا}^2 + \text{طب}^2 - \text{طا}^2}{2\,\text{طا طب}} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(۳) زاویون کی جیبونکی قیمت اضلاع کی رقمون مین

جیب التمام کی صور بیانیہ کے مجذورون کو ایک دوسرے سے تفریق کرنے سے ہمکو زاویون کے جیبونکی مجذور اضلاع کی رقمون مین بہ تفصیل ذیل معلوم ہونگی

$$\left.\begin{aligned} \text{جب ا} &= \frac{2\,\text{طا}^2\text{طب}^2 + 2\,\text{طب}^2\text{طس}^2 - 2\,\text{طس}^2\text{طا}^2 - \text{طا}^4 - \text{طب}^4 - \text{طس}^4}{4\,\text{طب}^2\text{طس}^2} \\ \text{جب ب} &= \frac{2\,\text{طا}^2\text{طب}^2 + 2\,\text{طب}^2\text{طس}^2 + 2\,\text{طس}^2\text{طا}^2 - \text{طا}^4 - \text{طب}^4 - \text{طس}^4}{4\,\text{طس}^2\text{طا}^2} \\ \text{جب س} &= \frac{2\,\text{طا}^2\text{طب}^2 + 2\,\text{طب}^2\text{طس}^2 + 2\,\text{طس}^2\text{طا}^2 - \text{طا}^4 - \text{طب}^4 - \text{طس}^4}{4\,\text{طا}^2\text{طب}^2} \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

اگر ان جملون کو طا² و طب² و طس² پر تقسیم کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{جب ا}^2}{\text{طا}^2} = \frac{\text{جب ب}^2}{\text{طب}^2} = \frac{\text{جب س}^2}{\text{طس}^2}$$

ان نسبتون مین ہر ایک برابر ہے اس ذوالقرنیہ جملہ طا اور طب اور طس کے یعنے

$$\frac{2\,\text{طا}^2\text{طب}^2 + 2\,\text{طب}^2\text{طس}^2 + 2\,\text{طس}^2\text{طا}^2 - \text{طا}^4 - \text{طب}^4 - \text{طس}^4}{4\,\text{طا}^2\text{طب}^2\text{طس}^2}$$

ان مساواتون کو بہ تفصیل ذیل بیان کرتے ہین اور وہ بالکل مطابق قاعدہ جیبونکے ہے

طا : طب : طس :: جب ا : جب ب : جب س

جو صور بیانیہ ہم نے جیب زاویون کی بیان کی ہے اوسمین ارقام مفرد ہین

اسواسطے اونکا حساب بذریعۂ کاریتم کے نہین ہوسکتا ہے اسواسطے ہم ایسی قیمتین جیبون کی اضلاع کی رقمون مین استنباط کرتے ہین جسمین رقمین اجزاء ضربی سے ترکیب پاتے ہون اور اس سبب سے اونکا حساب لوکاریتم سے نہایت آسان ہو فرض کرو کہ زاویہ کی جیب کو اضلاع کی رقمون مین بیان کرنا منظور ہے +

$$\text{جب}^2 \text{ا} = ۱ - \text{جم}^2 \text{ا}$$

اسیواسطے $\text{جب}^2 \text{ا} = (۱ + \text{جم ا})(۱ - \text{جم ا})$

ان جملون مین قیمت جدا جدا بوسیلۂ مساوات (۱) کے دریافت کرتے ہین

$$۱ + \text{جم ا} = ۱ + \frac{\text{طب}^2 + \text{طس}^2 - \text{طا}^2}{۲\,\text{طب طس}}$$

$$= \frac{۲\,\text{طب طس} + \text{طب}^2 + \text{طس}^2 - \text{طا}^2}{۲\,\text{طب طس}}$$

$$= \frac{(\text{طب} + \text{طس})^2 - \text{طا}^2}{۲\,\text{طب طس}}$$

لیکن دو مقدارون کے مربعون کا تفاوت برابر ہوتا ہے اونکی حاصل جمع اور حاصل تفریق کی حاصل ضرب کے

$$۱ + \text{جم ا} = \frac{(\text{طا} + \text{طب} + \text{طس})(\text{طب} + \text{طس} - \text{طا})}{۲\,\text{طب طس}}$$

اور اسیواسطے $۱ - \text{جم ا} = ۱ - \frac{\text{طب}^2 + \text{طس}^2 - \text{طا}^2}{۲\,\text{طب طس}}$

$$= \frac{۲\,\text{طب طس} - \text{طب}^2 - \text{طس}^2 + \text{طس}^2}{۲\,\text{طب طس}}$$

$$= \frac{\text{طا}^2 - (\text{طب} - \text{طس})^2}{۲\,\text{طب طس}}$$

مربعون کے حاصل تفریق کی جگہ مجموعہ اور تفاوت کا حاصل ضرب لکھین تو

$$۱ - \text{جم ا} = \frac{(\text{طس} + \text{طا} - \text{طب})(\text{طا} + \text{طب} - \text{طس})}{۲\,\text{طب طس}}$$

(۱ + جم ا) اور (۱ - جم ا) کے واسطے جو جملے بنائے ہوئے ہین تو اونکو ضرب دینے سے

$$\text{جب}^2 \text{ا} = \frac{(\text{طا} + \text{طب} + \text{طس})(\text{طب} + \text{طس} - \text{طا})(\text{طس} + \text{طا} - \text{طب})(\text{طا} + \text{طب} - \text{طس})}{۴\,\text{طب}^2\,\text{طس}^2}$$

اب ہم اس جملہ کی صورت اور زیادہ سادی بناتے ہین اور اوسکے واسطے یہ فرض

کرتے ہین کہ ص سے مثلث کے نصف مجموعۂ اضلاع کو تعبیر کرتا ہے تو

۲ ص = طا + طب + طس

۲ طا تو مساوات کی ہر ایک طرف سے تفریق کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۲ (ص - طا) = طب + طس - طا

اسیطرح ۲ (ص - طب) = طس + طا - طب

۲ (ص - طس) = طا + طب - طس

ان قیمتون کے مندرج کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{جب}^2 \frac{ا}{2} = \frac{4\text{ص}(\text{ص}-\text{طا})(\text{ص}-\text{طب})(\text{ص}-\text{طس})}{\text{طب}^2\,\text{طس}^2}$$

جب ۲ ا کی واسطے جو یہہ جملہ ہے اوسکا جذر نکالنے سے اور ایسے ہی جملے جب ۲ ب اور جب ۲ س کے لئے دریافت کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے ؛

$$\left.\begin{aligned} \text{جب}\,\frac{ا}{2} &= 2\sqrt{\frac{\text{ص}(\text{ص}-\text{طا})(\text{ص}-\text{طب})(\text{ص}-\text{طس})}{\text{طب}\,\text{طس}}} \\ \text{جب}\,\frac{ب}{2} &= 2\sqrt{\frac{\text{ص}(\text{ص}-\text{طا})(\text{ص}-\text{طب})(\text{ص}-\text{طس})}{\text{طس}\,\text{طا}}} \\ \text{جب}\,\frac{س}{2} &= 2\sqrt{\frac{\text{ص}(\text{ص}-\text{طا})(\text{ص}-\text{طب})(\text{ص}-\text{طس})}{\text{طا}\,\text{طب}}} \end{aligned}\right\} \quad (۳)$$

(۴) نصف زاویون کے جیب اور جیب التمام اور مماس

اگر ہم اوس جملہ کو جو (۱ + جم ا) کی قیمت کے واسطے دریافت کیا ہے اور ۲ جم² ½ کو مساوی لکھین اور بجائے اجزاء ضربی (طا + طب + طس) اور (طب + طس - طا) کے اون کی قیمتین ۲ ص اور ۲ (ص - طا) لکھین تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا

$$\text{جم}^2 \frac{1}{2}ا = \frac{\text{ص}(\text{ص}-\text{طا})}{\text{طب}\,\text{طس}}$$

اس مساوات کا جذر لینے اور اس طرح کے جملے جم ½ ب اور جم ½ س کے دریافت کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\frac{\text{ص (ص − طا)}}{\text{طب طس}}}$$

$$\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب} = \sqrt{\frac{\text{ص (ص − طب)}}{\text{طا طس}}} \qquad (۴)$$

$$\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{س} = \sqrt{\frac{\text{ص (ص − طس)}}{\text{طا طب}}}$$

اور اسیطرح (ا − جم ا) کی صورت بیانیہ سے ہم کو یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\frac{\text{(ص − طب) (ص − طس)}}{\text{طب طس}}}$$

$$\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ب} = \sqrt{\frac{\text{(ص − طس) (ص − طا)}}{\text{طس طا}}} \qquad (۵)$$

$$\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{س} = \sqrt{\frac{\text{(ص − طا) (ص − طب)}}{\text{طا طب}}}$$

اگر ہم (۵) کے اول مساوات کو (۴) کے اول مساوات پر تقسیم کریں تو مس $\tfrac{1}{2}$ ا کی قیمت اور اسیطرح سے مس $\tfrac{1}{2}$ ب اور مس $\tfrac{1}{2}$ س کی یہ دریافت ہونگی ؛

$$\text{مس}\tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\frac{\text{(ص − طب) (ص − طس)}}{\text{ص (ص − طا)}}}$$

$$\text{مس}\tfrac{1}{2}\text{ب} = \sqrt{\frac{\text{(ص − طس) (ص − طا)}}{\text{ص (ص − طب)}}} \qquad (۶)$$

$$\text{مس}\tfrac{1}{2}\text{س} = \sqrt{\frac{\text{(ص − طا) (ص − طب)}}{\text{ص (ص − طس)}}}$$

پانچوین شکل

دعوی مثلث مستوی کا رقبہ برابر ہوتا ہے نصف سطح دو اضلاع اور اون کے زاویہ درمیانی کے جیب کے

بیان دعوی فرض کرو کہ اضلاع طب اور طس ہون اور اونکا درمیانی زاویہ ا ہو

$$\text{رقبہ} = \tfrac{1}{2}\ \text{طب طس جیب ا}$$

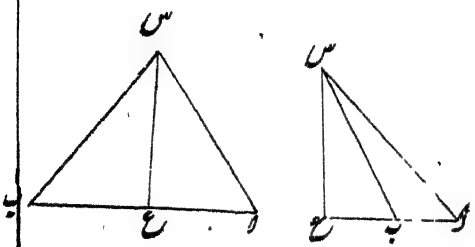
صورت اول

اگر زاویہ درمیانی قائمہ ہو

اثبات اس صورت مین زاویہ درمیانی کی جیب ایک ہوگی اسلئے اثبات دعوی ظاہر ہے

صورت دوم

اگر زاویۂ درمیانی حادہ ہو



عمل شکل فرض کرو کہ ا زاویہ حادہ ان مثلثوں میں سے ہر ایک میں ہو اور ا ب پر س سے عمود س ع نکالو

اثبات بحکم (اش ۴ م) کے

رقبہ = ½ ا ب × س ع

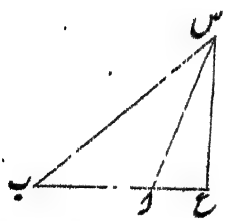
لیکن ا ب = طس اور بموجب شکل وال اب سوم کی

س ع = طب جیب ا اسیواسطے

رقبہ = ½ طب طس جیب ا

صورت سوم

اگر زاویۂ درمیانی منفرجہ



عمل شکل فرض کرو کہ ا زاویۂ منفرجہ اس مثلث میں ہو اور ب ا ممدودہ پر س سے عمود س ع نکالا گیا ہو

اثبات بحکم (اش ۲ م) کے

رقبہ = ½ ا ب × س ع

لیکن ا ب = طس اور س ع = س ا × جب س ا ع اور س ا ع تکملہ ا کا ہے اسواسطے

س ع = طب جب ا اسیواسطے

رقبہ = ½ طب طس جیب ا فہوالمراد

مثال

معلوم ہی کہ طب = ۲۵ فیٹ طس = ۱۱۷ فیٹ اور ا = ۲۷° رقبہ دریافت کرو

۳۵×۱۱۷ = ۴۰۹۵

جب ۲۷° = ۰٫۴۵۳۹۹

(۲) ۱۸۵۹٫۰۸۹۰۵

رقبہ = ۰۹۲۹٫۵۴۴۵۲

امثلۂ مشق ۱۲

رقبہ دریافت کرو

(۱) طب = ۲۸۷۱ فٹ اور طس = ۱۰۳٫۲۲ فٹ اور ل = ۳۰°

(۲) طب = ۱۲۳٫۲ فٹ اور طس = ۷۶ فٹ اور ل = ۴۹°

(۳) طب = ۱۰۰۰ گز اور طس = ۲½ میل اور ل = ۴۲°

یہ صورت مثلثی لوگارتھم کی آسانی کے لئے اختیار کی گئی ہیں

لوگ (۲ رقبہ) = لوگ طب + لوگ طس + لوگ جب ل − ۱۰

مثال

معلوم ہے کہ طب = ۸۷۶ اور طس = ۱۱۳ اور ل = ۵۷° ۰۳′ ۲۷″

رقبہ دریافت کرو

لوگ ۸۷۶ = ۲٫۹۴۲۵۰۰

لوگ ۱۱۳ = ۲٫۰۵۳۰۸

لوگ جب ۵۷° ۰۳′ = ۹٫۹۲۳۸۴۰

(تفاوت جدولی = ۸) × ۲۷/۶۰ = ۳

۱۴٫۹۱۹۴۵

لوگ (۲ چند رقبہ) = ۴٫۹۱۹۴۵

۲ رقبہ = ۸۲۰۷۲ جواب ۴۱۵۳۶

امثلۂ مشق ۱۳

رقبہ دریافت کرو

(۱) معلوم ہی کہ طب = ۵۱۳ اور طس = ۲۲ اور ا = ۹۷°

(۲) طب = ۱۲۷٫۳ اور طس = ۸۹۲٫۷ اور ا = ۱۲۶°

(۳) طب = ۳۱۴٫۲ اور طس = ۵۵۲۷٫ اور ا = ۴۹° ۶۶′ ۲۰″

(۴) طب = ۷۷ اور طس = ۱۵۹ اور ا = ۵۰° ۳۱′ ۲۸″

(۵) طب = ۲۸۷٫۱ اور طس = ۳۱۰٫۲۵ اور ا = ۱۱۴° ۴۸′ ۳۲″

(۵) اضلاع کی رقموں مین رقبہ مثلث کا دریافت کرو

بموجب آخر شکل کے

رقبہ = ½ طب طس جب ا

جب ا = $\sqrt{\frac{ص(ص-طا)(ص-طب)(ص-طس)}{طب طس}}$

اسواسطے رقبہ = $\sqrt{ص(ص-طا)(ص-طب)(ص-طس)}$

اس صورت بیانیہ سے ہم مثلث کے تینون ضلعون کے معلوم ہونے سے رقبہ دریافت کرنیکا یہ قاعدہ استنباط کرتے ہین

قاعدہ

اول تینون ضلعون کو جمع کرو اور حاصل جمع کا نصف کرلو

دوم نصف مجموعہ سی ہر ایک ضلع کو جدا جدا تفریق کرو

سوم تینون باقیون اور نصف مجموعۂ اضلاع کو آپس مین ضرب دو

چہارم حاصل ضرب کا جذر نکالو

پس ماحصل رقبۂ مطلوب ہوگا

مثال

معلوم ہے کہ طا = ۱۰۰ اور طب = ۸۶ اور طس = ۷۲ رقبہ دریافت کرو ؛

۱۰۰
۸۶
۷۲
۲ | ۲۵۸
۱۲۹
۱۰۰
۲۹

۱۲۹
۸۶
۴۳

۱۲۹
۷۲
۵۷

۱۲۹ × ۲۹ × ۴۳ × ۵۷ = ۹۱۶۹۱۹۱

جذر = ۳۰۲۸

جواب ۳۰۲۸

امثلہ مشق ۱۴

رقبہ دریافت کرو

(۱) معلوم ہے کہ طا = ۱۴٫۲۶ اور طب = ۱۹٫۲ اور طس = ۳۲

(۲) معلوم ہے کہ طا = ۷۲ اور طب = ۱۶۴٫۱ اور طس = ۲۲۳

(۳) معلوم ہے کہ طا = ۱۵۳ اور طب = ۴۹۸ اور طس = ۹۸

یہ صورت لوکارثم کے حساب کے واسطے اختیار کی گئی ہے کہ

لوگ رقبہ = ½ [لوگ ص + لوگ (ص − طا) + لوگ (ص − طب) + لوگ (ص − طس)]

مثال

معلوم ہے کہ طا = ۱۷٫۲۸ اور طب = ۱۳٫۲۰ اور طس = ۱۴٫۶۲ رقبہ دریافت کرو

۱۷٫۲۸
۱۳٫۲۰
۱۴٫۶۲
۲ | ۴۵٫۱۰
۲۲٫۵۵
۱۷٫۲۸
۵٫۰۷

۲۲٫۵۵
۱۳٫۲۰
۹٫۳۵

=

۲۲٫۵۵
۱۴٫۶۲
۷٫۹۳

لوگ ۲۲٫۵۵ = ۱٫۳۵۳۱۵

لوگ ۵٫۲۷ = ۰٫۷۲۱۸۱

لوگ ۹٫۳۵ = ۰٫۹۷۰۸۱

لوگ ۷٫۹۳ = ۰٫۸۹۹۲۷

۲) ۳٫۹۴۵۰۴

لوگ رقبہ = ۱٫۹۷۲۵۲ جواب ۹۳٫۸۶۸

امثلۂ مشق ۱۵

رقبہ دریافت کرو

(۱) معلوم ہے کہ طا = ۱۳۱ اور طب = ۲۴۶ اور طس = ۳۲۷

(۲) معلوم ہے کہ طا = ۲٫۰۵ اور طب = ۱٫۶۷ اور طس = ۲٫۷

(۳) معلوم ہے کہ طا = ۱۸۰۰ اور طب = ۱۷۲۸ اور طس = ۱۵۲۱

(۴) معلوم ہے کہ طا = ۰٫۲۳ اور طب = ۰٫۳۴ اور طس = ۰٫۴۵

(۵) معلوم ہے کہ طا = ۵۰۷ اور طب = ۶۰۳ اور طس = ۷۲۱

فصل سوم مین جو جملے زاویوں کی جیب کے مجذور کے بیان ہوئے ہین اون سے بھی رقبہ مثلث کا اضلاع کی رقمون مین یہ دریافت ہوگا کہ

رقبہ = $\frac{1}{4}\sqrt{2\,\text{طا}^2\,\text{طب}^2 + 2\,\text{طب}^2\,\text{طس}^2 + 2\,\text{طس}^2\,\text{طا}^2 - \text{طا}^4 - \text{طب}^4 - \text{طس}^4}$

(۶) مثلثات غیر قائم الزاویہ کی پانچ صورتین

مثلث مستوی مین تین ضلعے طا و طب اور طس اور تین زاویے ا اور ب اور س ہوتے ہین اگر ان مقادیر مین سے تین تین معلوم ہون اور ان تینون مین کوئی تعلق ایسا ہو کہ دو کے معلوم ہونے سے خود بخود تیسرا معلوم ہو جائے تو باقی تین علم ہندسہ کے عمل سے بخوبی دریافت ہو سکتی ہین تین زاویے ا اور ب اور س کے آپس مین بے تعلق نہین ہین کیونکہ مجموعہ اونکا ۱۸۰° ہوتا ہے اور یہ ظاہر ہے کہ بے انتہا مثلث

ایسے بن سکتے ہین کہ جنکے زاویے آپسمین ان زاویوں کی برابر ہون جنکا مجموعہ ۱۸۰° ہو سوائے ان کے اگر اور کوئی تین ان چھہ مقادیر طا وطب وطس و ا اور ب اور س میں سے معلوم ہون تو باقی تین کا حساب لگ سکتا ہے

اس فصل کا مطلب یہ ہے کہ پانچ مختلف صورتین دو مثلث کے حل کرنے کی بیان کیجائین اور وہ پانچ صورتین یہ ہین

اول ایک ضلع اور دو زاویے متصل ضلع معلوم کے معلوم ہین

دوم ایک ضلع اور دو زاویے جنمین ایک متصل اور دوسرا مقابل ضلع معلوم کے ہی

سوم دو ضلعے معلوم ہین اور اونمین سے ایک ضلع کے مقابل کا زاویہ معلوم ہے

چہارم دو ضلعے اور زاویۂ درمیانی

پنجم تینون ضلعے معلوم ہین

اول صورت

ایک ضلع اور دو زاویے جنمین سے ہر ایک متصل ضلع معلوم کا ہی معلوم ہین

فرض کرو کہ طا ضلع معلوم اور ب اور س دو زاویے معلوم ہون تو

ا = ۱۸۰° - (ب + س) (۱)

بموجب شکل اول $\frac{\text{طا}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب ا}}$

اسیواسطے لوگ طب = لوگ طا + لوگ جب ب - لوگ جب ا (۲)

اور اسیطرح لوگ طس = لوگ طا + لوگ جب س - لوگ جب ا (۳)

اب بوساطت مساوات (۲) اور (۳) کے اضلاع طب اور طس کا حساب ہوتا ہے

مثال

معلوم ہے کہ طب = ۲۱۷ اور ب = ۵۶° ۲۱' ۳۰" اور س = ۶۲° ۴۱' ۲۰"

ا اور طب اور طس کو دریافت کرو

مثلثات غیر قائم الزاویہ

بموجب مساوات (۱)

ا = ۶۰° ۵۷′ ۱۰″

طب کے دریافت کرنے کے واسطے مساوات (۲) کے موافق عمل کریں تو یہ حاصل ہوگا کہ

لوگ ۲۱۷ = ۲٫۳۳۶۴۶

لوگ جب ۲۱°۶′ = ۹٫۹۱۰۳۵

(تفاوت جدول = ۹) × ۳۰/۶۰ = ۴

۱۲٫۲۵۶۸۵

لوگ جب ۵۷°۶۰′ = ۹٫۹۴۱۶۱

۲٫۳۱۵۲۴

۷ × ۱۰/۶۰ = ۱

لوگ طب = ۳۱۵۲۳

طب = ۲۰۶٫۶۵

طس کے دریافت کرنے کے لئے ہم مساوات (۳) کے موافق عمل کرتے ہیں

لوگ ۲۱۷ = ۲٫۳۳۶۴۶

لوگ جب ۲۱°۶′ = ۹٫۹۴۸۶۵

تفاوت جدولی = (۶) × ۲۰/۶۰ = ۲

۱۲٫۲۸۵۱۳

لوگ جب ۵۷°۶۰′ = ۹٫۹۴۱۶۱

۲٫۲۴۳۵۲

۷ × ۱/۶۰ = ۱

لوگ طس = ۲٫۳۴۳۵۱

طس = ۲۲۰٫۵۵

جواب ا = ۶۰° ۵۷′ ۱۰″

طب = ۲۰۶٫۶۵

طس = ۲۲۰٫۵۵

امثلۂ مشق ۱۶

(۱) معلوم ہی کہ طا = ۱۴٫۸۳ اور ب = ۴۳° ۳۱′ ۲۵″ اور س = ۶۱° ۲۵′ تو ا اور طب اور طس دریافت کرو

(۲) معلوم ہی کہ طا = ۱۷٫۲۸ اور ب = ۴۲° ۳۱′ ۳۰″ اور س = ۸۱° ۴۴′ ۲۰″
ا اور طب اور طس کو دریافت کرو

معلوم ہے کہ طا = ۵۳۷٫۲۱ اور ب = ۱۱۷° ۲۳′ ۱۲″ اور س = ۲۵° ۱۸′ ۱۰″
ا اور طب اور طس کو دریافت کرو

(۴) معلوم ہے کہ طا = ۱۰۰۰ اور ب = ۱۲۰° ۱۵′ ۱۵″ س = ۳۶۰° ۲۵′ ۱۰″
ا اور طب اور طس کو دریافت کرو

(۵) معلوم ہے کہ طا = ۹۷٫۶ اور ب = ۳۶° ۴۳′ ۲۰″ س = ۲۲۰° ۱۰′ ۱۵″
ا اور طب اور طس کو دریافت کرو

صورت دوم

ایک ضلع اور دو زاویے معلوم ہین جنمین سے ایک ضلع معلوم کے متصل اور دوسرا مقابل ہے ۔ یہ صورت اسطرح پہلی سے بن سکتی ہی کہ ۱۸۰° مین سے دو معلوم زاویون کی مجموعہ کو تفریق کرکے تیسرا زاویہ دریافت کرین پہر مثلث کو حل موافق پہلی صورت کے کرلیں

صورت سوم

دو ضلعے اور اونمین سے ایک ضلع کا مقابل زاویہ معلوم ہی
فرض کرو کہ اضلاع معلوم طا اور طب ہین اور زاویہ معلوم ب
بموجب شکل اول کے

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{طا}}{\text{طب}}$$

سواسطے لوگ جب ا = لوگ جب ب + لوگ طب − لوگ طا (۱)

اس مساوات سے زاویہ ب کا حساب ہو جائے گا

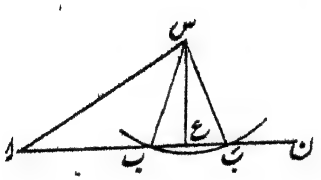
س = ۱۸۰° - (ا + ب) (۳)

اور طس کا حساب موافق مساوات (۳) صورت اول کے ہو جائے گا

اس صورت کو صورت مشتبہ کہتے ہیں اسواسطے کہ جب زاویہ معلوم حادہ ہو تو اکثر مثلث کے دو حل ہونگے ؛

مساوات (۱) سے قیمت لوگ جیب ب کی دریافت کرتے ہین لیکن جیب زاویہ کے اور اور اوسکے تکملے کی آپسمین برابر ہوتے ہین (بموجب مساوات ۲۴ باب دوم کے) اس سے یہ مستنبط ہوا کہ لوگ جیب ب کی جدولی قیمت سے دو زاویئے دریافت ہونگے جنکا مجموعہ ۱۸۰° ہوگا

اس صورت کے مشتبہ ہونے کی وجہ مثلث بنانے سے موافق علم ہندسہ کے بھی اس طرح ثابت ہوتی ہی کہ



فرض کرو زاویہ معلوم ا حادہ ہے ایک خط ا ن غیر محدود کھیچو اور زاویہ س ا ن کا برابر زاویہ معلوم کے ا س سے بناؤ اور ا س برابر ایک ضلع معلوم کے بناؤ اور س کے مرکز اور دوسرے ضلع کے برابر نصف قطر لیکر دائرہ کھیچو جو اکثر ا ن کو دو نقطون ب اور ب پر قطع کرے گا اب یہ بدیہی بات ہے کہ دو مثلث ا ب س اور ا س ب موافق معطیات معلوم کے سب طرح سے بن گئے ؛

مثلث ب س ب متساوی الساقین ہے اسواسطے زاویہ س ب ب برابر ہے زاویہ س ب ب کے اور س ب ب تکملہ زاویہ س ب ا کا ہے اس سے

یہ مستنبط ہوتا ہے کہ زاویے ا ب س اور ا ب س جو دونون مثلثون مین مقابل ضلع طب کے ہین باہم ایک دوسرے کے تکملے ہین اور اسیواسطے اونکی ایک ہی جیب ہے اگر طا کم طب جب ا سے ہو تو یہ صورت ناممکن ہوگی یعنے مثلث کا بنانا ممکن ہوگا دلیل اسکی یہ ہے کہ اگر س ع عمود ا ب پر نکالین تو س ع = طب جب ب بحکم شکل اول باب سوم کے پس جب س کے مرکز اور س ع سے کم نصف قطر پر دائرہ کھینچین تو وہ خط ا ن سے ہرگز نہین ملے گا اسلئے مثلث نہین بنے گا ؛

اگر طا = طب جب ا اس صورت مین مثلث کا ایک ہی حل ہوگا یعنے مثلث قائم الزاویہ ا س ع ہوگا

اگر طا بڑا طب جب ا سے ہو اور طب چھوٹا طب سے ہو تو مثلث کے ایسے دو حل ہونگے جنکا اوپر ذکر ہوا +

اگر طا بڑا طب سے ہو تو فقط ایک ہی حل ہوگا کیونکہ نقطۂ تقاطع ب جو بائین طرف ا کے واقع ہوگا اس صورت مین متروک کیا جائے گا اسواسطے ہم قیمت ب کی ایسی منتخب کرسکتے ہین کہ زاویۂ ب حادہ ہو

اگر زاویۂ معلوم ا منفرجہ ہو تو اسطرح شکل بنا کر ہم یہ دیکھ سکتے ہین کہ فقط ایک صورت قابل حل کے ہے جسمین طا بڑا طب سے ہو اس صورت مین بھی ہمکو زاویۂ ب کی ایسی قیمت منتخب کرنی چاہیئے جو زاویۂ حادہ کے واسطے قیمت ہو

مثالین

(۱) معلوم ہے کہ طب = ۱۵۶ اور طا = ۱۳۰ اور ا = ۵۲° ۲۵′ ب اور س اور طا دریافت کرو ؛

لوگ جیب ۵۲° ۲۵′ = ۹٫۸۲۸۹۹

لوگ ۱۵۶ = ۲٫۱۹۳۱۲

۱۲٫۰۲۲۱۱

لوگ ۱۳۰ = ۲٫۱۱۳۹۴

۹٫۹۰۸۱۶

جدولی قیمت ب کی جو لوگ جب ب کی قیمت کی مطابق ہوتی ہے ۵۴° ۰۲′ ۲۰″ ہے اور جو کچھہ اوپر ہم نے لکھا ہے اوسکی موافق تکملہ اس زاویہ کا یعنی ۱۲۵° ۵۷′ ۴۰″ بھی وہی قیمت لوگ جب کی رکھتا ہے اسیواسطے دو قیمتیں ب کی لیتے

ب = ۵۴° ۰۲′ ۲۰″

ب = ۱۲۵ ۵۷′ ۴۰″

اور اس کے مطابق دو قیمتیں س کے دریافت ہوتی ہین

س′ = ۸۳° ۳۲′ ۴۰″

س = ۱۱° ۳۷′ ۲۰″

اور وہی قیمتین طس کی بہ تفصیل ذیل

طس = ۱۹۱٫۵۰

طس = ۳۸٫۸۳

(۲) معلوم ہے کہ طب = ۳۱ اور طا = ۳۸ اور ل = ۵۳° ۲۰′ ۰۶″ قیمت ب اور طس اور طا کی دریافت کرو

لوگ ۵۳° ۲۰′ = ۹٫۹۰۴۲۴

۱۰ × ۱۰ = ۱

لوگ ۳۱ = ۱٫۴۹۱۳۶

۱۱٫۳۹۵۶۱

لوگ ۳۸ = ۱٫۵۷۹۷۸

لوگ جب ب = ۹٫۸۱۵۸۲

لوگ جب ب کی قیمت اسکے مطابق ۴۰° ۵۲′ ۲۱″ ہے اور تکملہ اس کا ۱۳۹° ۰۷′ ۳۹″ یہ قیمت حل کے اندر داخل نہیں رکھتے کیونکہ اس صورت میں طا بڑا طب سے ہے س کا حساب مساوات (۲) سے کرو اور طب بموجب مسلمات (۳)

صورت (۱) کے دریافت کرو

جواب ب = ۴۰° ۵۲′ ۲۱″

س = ۸۵° ۴۷′ ۳۳″

طس = ۲۴۴ ، ۴۷

امثلۂ مشق ۱۷

(۱) معلوم ہے کہ طب = ۵۳ اور طا = ۴۷ اور ا = ۳۶° ۴۲′ ۳۰″
ب (حادہ) اور س اور طس کو دریافت کرو

(۲) معلوم ہے کہ طب = ۳۱۲ اور طا = ۵۱۷ اور ا = ۹۲۴° ۳۲′
ب اور س اور طس دریافت کرو

(۳) معلوم ہے کہ طب = ۲۱۷ اور طا = ۱۹۹ اور ا = ۶۲° ۲۴′ ۲۰″
ب (منفرجہ) اور س اور طس کو دریافت کرو

(۴) معلوم ہے کہ طب = ۱۳۰۵۸ اور طا = ۶۲۱۷۳ اور ا = ۱۰۷° ۰۳′ ۱۳″
ب اور س اور طس کو دریافت کرو

(۵) معلوم ہے کہ طب = ۱۰۰ اور طا = ۶۲ اور ا = ۳۸° ۱۹′
ب اور س اور طس کو دریافت کرو

صورت چہارم

دو ضلعے اور اونکا درمیانی زاویہ معلوم ہے

فرض کرو کہ طا اور طب اور اونکا درمیانی زاویہ س معلوم ہے تو

$$\frac{1}{2}(ا + ب) = ۹۰° - \frac{1}{2} س \qquad (۱)$$

بحکم شکل دوم کے طا + طب : طا − طب :: مس ½ (ا + ب) : مس ½ (ا − ب)

اس سے لوگ مس ½ (ا − ب) = لوگ (طا − طب) + لوگ مس ½ (ا + ب) − لوگ (طا + طب) (۲)

مثلثات غیر قائم الزاویہ

(۱) اور (۲) مساوتون کے ذریعہ سے ہم ½ (ا + ب) اور ½ (ا − ب) کی قیمتون کا حساب لگا سکتے ہین اور اون قیمتون کی جمع اور تفریق سے ا اور ب کی قیمتین دریافت کر سکتے ہین ؛

بموجب ۳ شکل ۲ باب کے

طس : طا − طب :: جیب ½ (ا + ب) : جیب ½ (ا − ب)

اس سے لوگ طس = لوگ (طا − طب) + لوگ جیب ½ (ا + ب) − لوگ جیب ½ (ا − ب) (۳)

اس مساوات سے طس کا حساب مثال ذیل مین کرتے ہیں

مثال

معلوم ہے کہ طا = ۲۱۸ اور طب = ۱۵۶ اور س = ۳۸° ۲۱′ ۲۰″

ا اور ب اور طس کی قیمت دریافت کرو

			۲۱۸	
			۱۵۶	
مجموعہ =			۳۷۴	
	۱۸۰°			
	۳۸°	۲۱′	۲۰″	
	۱۴۱°	۳۸′	۴۰″	(۲)

تفاوت = ۳۲ ½ (ا + ب) = ۲۰″ ۴۹′ ۷۰

لوگ مس ½ (ا + ب) = ۱۰٫۴۵۸۲۷ لوگ جیب ½ (ا + ب) = ۹٫۹۷۵۲۰

لوگ ۶۲ = ۱٫۷۹۲۳۹ لوگ ۶۲ = ۱٫۷۹۳۲۹

لوگ ۳۷۴ = ۲٫۵۷۲۸۷ لوگ جیب ½ (ا − ب) = ۹٫۶۳۳۷۴

لوگ مس ½ (ا − ب) = ۹٫۶۷۸۱۹ لوگ طس = ۲٫۱۲۳۸۵

طس = ۱۳۶٫۱

½ (ا − ب) =	۲۵°	۲۹′	۴۰″
½ (ا + ب) =	۴۰°	۴۹′	۲۰″
ا =	۶۵°	۱۸′	۶۰″
ب =	۱۵°	۲۰′	۱۰″

مثلثات غیر قائم الزاویہ

امثلہ مشق ۱۸

(۱) اگر معلوم ہے کہ طا = ۵۱۶ اور طب = ۲۱۹ اور س = ۹۸° ۳۶′ ۰۶″
ا اور ب اور طس کو دریافت کرو

(۲) طا = ۲۴ء۵۳ طب = ۲۷ء۳۱ اور س = ۱۲۶° ۳۶′ ۶″ ا اور ب اور طس کو دریافت کرو

(۳) معلوم ہے کہ طا = ۱۸۳۱ اور طب = ۵۳۶ اور س = ۱۶° ۲۸′ ۴۰″
ا اور ب اور طس کو دریافت کرو

(۴) معلوم ہے کہ طا = ۱۴ ۸۲ اور طب = ۳۷۳۲ اور س = ۶۱° ۵۳′
ا اور ب اور طس کو دریافت

(۵) معلوم ہے کہ طا = ۱۷۳ اور طب = ۱۲۳ اور س = ۲۲° ۱۳′ ۳۰″
ا اور ب اور طس کو دریافت کرو

صورت پنجم

تینون ضلعے معلوم ہین

سب سے زیادہ آسان صورت حل کی اون قوانین سے جو در باب نصف زاویونکے مماس کے بیان ہوئے ہین پیدا ہو سکتے ہے اور وہ یہ ہے کہ

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ا} = \sqrt{\frac{(\text{ص}-\text{طب})(\text{ص}-\text{طس})}{\text{ص}(\text{ص}-\text{طا})}}$$

ص - طا کو اوپر اور نیچے ضرب دو تو

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ا} = \frac{1}{\text{ص}-\text{طا}}\sqrt{\frac{(\text{ص}-\text{طا})(\text{ص}-\text{طب})(\text{ص}-\text{طس})}{\text{ص}}}$$

جذر کے ماتحت جو جملہ ہے وہ برابر اوس دائرہ کے نصف قطر کے ہی جو مثلث مین بنایا جائے (اقلیدس مقالہ چہارم نتیجہ ش ۴ کے) اس نصف قطر کو نق سے تعبیر کرو تو

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ا} = \frac{\text{نق}}{\text{ص}-\text{طا}}$$

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{ب} = \frac{\text{نق}}{\text{ص}-\text{طب}}$$

مثلث غیر قائم الزاویہ

مس ½ س = $\frac{\text{نق}}{\text{ص − طس}}$

مساواتون کی ہر ایک طرف کا لوکارثم لو تو

لوگ مس ½ ا = ۱۰ + لوگ نق − لوگ (ص − طا)

لوگ مس ½ ب = ۱۰ + لوگ نق − لوگ (ص − طب)

لوگ مس ½ س = ۱۰ + لوگ نق − لوگ (ص − طس)

مثال

معلوم ہے کہ طا = ۲۶ اور طب = ۳۱ اور طس = ۳ ا اور ب اور س کو دریافت کرو

طا = ۲۶

طب = ۳۱

طس = ۴۳

۱۰۰۸

۲

ص = ۵۰ ۵۰ ۵۰

ص − طا = ۲۶ / ۲۴ ص − طب = ۳۱ / ۱۹ ص − طس = ۴۳ / ۷

لوگ ۲۴ = ۱٫۳۸۰۲۱

لوگ ۱۹ = ۱۰٫۲۷۸۷۵

لوگ ۷ = ۰٫۸۴۵۱۰

۳٫۵۰۴۰۶

لوگ ۵۰ = ۱٫۶۹۸۹۷

لوگ نق = ۹٫۰۲۵۵

۱۰٫۹۰۲۵۵ ۱۰٫۹۰۲۵۵ ۱۰٫۹۰۲۵۵

۱٫۳۸۰۲۱ ۱٫۲۷۸۷۵ ۰٫۸۴۵۱۰

لوگ مس ½ ا = ۹٫۵۲۲۳۴ لوگ مس ½ ب = ۹٫۶۲۳۸۱ لوگ مس ½ س = ۱۰٫۰۵۷۴۵

½ ا = ۸° ۲۴′ ۴۸″ ½ ب = ۲۲° ۴۸′ ۳۰″ ½ س = ۴۸° ۴۹′ ۳۶″

ا = ۳۶° ۴۹′ ۳۶″ ب = ۴۵° ۳۷′ ۰۰″ س = ۹۷° ۳۳′ ۲۴″

امثلہ مشق ۱۹

(۱) معلوم ہے کہ طا = ۱۵٫۳۲ اور طب = ۲۱٫۵۶ اور طس = ۱۶٫۲۲ زاویئے دریافت کرو

(۲) معلوم ہے کہ طا = ۲۱٫۳۴ اور طب = ۱۶٫۱۷ اور طس = ۸۱۵ زاویئے دریافت کرو

(۳) معلوم ہے کہ طا = ۱۵۰۰ اور طب = ۱۳۴۲ اور طس = ۱۱۱۰ زاویئے دریافت کرو

(۴) معلوم ہے کہ طا = ۱ اور طب = ۱٫۳۲ اور طس = ۰٫۷۵ زاویئے دریافت کرو

(۵) معلوم ہے کہ طا = ۲۷ اور طب = ۳۲ اور طس = ۹ زاویئے دریافت کرو

باب ہفتم

ارتفاع اور فاصلے

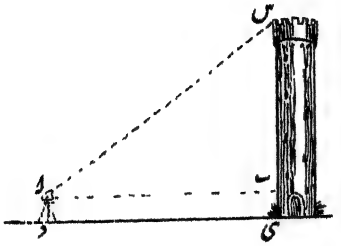
قائم الزاویہ اور غیر قائم الزاویہ مثلثونکے حل کرنیکے جو قاعدے بیان ہوئے ہین اونکی وساطت اور ذریعہ سے مساحت برّی اور بحری اور نقشے بنانے والے اون ارتفاعون اور فاصلون کا حساب لگا سکتے ہین جہان اونکی رسائی نہین ہوسکتی ملک کے ملک اور سمندر کے سمندر فقط ایک خط کے ناپنے سے اور باقی زاویون کی پیمائش سے ناپ جاتے ہین اور اون کے چربے اوتراتے ہین اور نقشہ کھینچ جاتے ہین یہ خط جو ناپا جاتا ہے اوسکو قاعدہ کا خط کہتے ہین اور فقط اس خط کا طول ہی ہاتھون سے ناپتے ہین اور باقی کام زاویونکی پیمائش سے چلاتے ہین غرض اس معاملہ کی جو بڑی بڑی باتین ہین اونکو سوالات کی صورتین بیان کرتے ہین

پہلا سوال

ایک سطح افقی پر ایک شے ہے اور اوس تک ہم نہین پہونچ سکتے اوسکا ارتفاع دریافت کرو اگر آ دیکھنے والے کی آنکھ کا مقام ہو اور ا ب = دی کے ہو اور دی فاصلہ افقی اوس شے کا ہو اور زاویہ ب ا س زاویہ ارتفاع ہو تو یہ ظاہر ہے کہ ارتفاع ب س کا حساب مثلث قائم الزاویہ ب ا س سے ہوسکتا ہے اور جب ارتفاع سوم ہو تو اوسکو ب ہی ۔ اوسکے زیادہ کرین اور دیکھنے والے کی آنکھ کا ارتفاع افق سے سطح تک

ہمکو ارتفاع مطلوب اوس شے کا دریافت ہو جائے گا ؛

امثلۂ مشق ۲۰



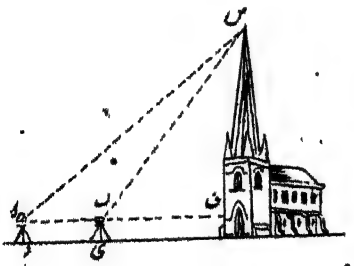
(۱) ایک آدمی کی آنکھ ۵ فیٹ ۶ انچ سطح زمین سے اونچی ہے وہ ۱۲۵ فیٹ برج کے قاعدہ سے پرے ہٹا تو زاویۂ ارتفاع ۵۲° ۳۴′ بنا اوسکا ارتفاع دریافت کرو ؛

(۲) ایک خندق ۴۲ فیٹ چوڑی ہے اوسکے کنارہ پر سے دیکھا تو زاویۂ ارتفاع قلعہ کی دیوار کا ۴۹° ۱۲۸ بنا تو بتاؤ دیوار کتنی بلند ہے اور میری آنکھ کا ارتفاع ۵ فیٹ ہے ؛

سوال دوسرا

سطح افقی سے ارتفاع اور فاصلہ کسی شے کا جس تک ہم پہونچ نہیں سکتے دریافت کرو ؛

فرض کرو کہ ا اور ب دو مقام دیکھنے والے کی آنکھ کے ہیں اور فاصلہ ا ب = د ی اور د ی کی ہم نے پیمائش کر لی ہے اگر زاویۂ ارتفاع ف ا س = ا اور ف ب س = ب کے بھی دیکھے جائیں اور پیمائش کئے جائیں تو اوس شے کے ارتفاع اور فاصلہ کا حساب ہو سکتا ہے



اسواسطے کہ مثلثات ا ب س مین طول ضلع ب س کا موافق صورت اول مثلث غیر قائم الزاویہ کے دریافت ہو سکتا ہے اور مثلث ف ب س کے اضلاع ف س اور ف ب کا حساب موافق صورت چہارم مثلثات قائم الزاویہ کے ہو سکتا ہے ۔ مشاہدہ کرنے والے کے مقام سے فاصلہ ضلع ف ب ہے اور اگر ف س اپر ارتفاع مشاہدہ کرنی والے کی آنکھ کا

زیادہ کرین تو اوس شے کا ارتفاع معلوم ہوجائے گا

ف س = ا ب × جب ا جب (ب − ا) / جب (ب − ا)

ف ب = ا ب × جب ا جم ب / جب (ب − ا)

امثلۂ مشق ۲۱

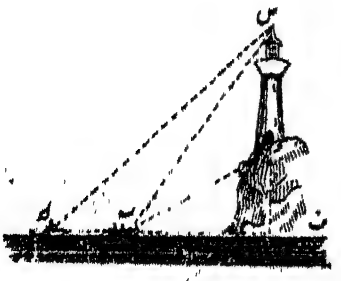
(۱) ایک گرجا کی مینار کا ارتفاع دریافت کرنا منظور تھا مین نے دو مقام ایک خط پر ۵۲ گز کے فاصلہ پر مقرر کئے اور اون مقامات پر زاویئے ارتفاع ۵۸° ۴۰′ اور ۳۶° ۴۲′ پیمائش مین آئے اور میری آنکھ زمین سے ۴ فیٹ ۶ انچ بلند تھی تو بتاؤ مینار کا ارتفاع کیا ہے ؟

(۲) اوس مینار کا ارتفاع دریافت کرو جسکی جڑ سے زاویۂ ارتفاع ۵۲° ہے اور جب اوسکی جڑ سے ۳۰۰ گز سطح افقی پر پیمائش کرکے پرے ہٹا تو زاویۂ ارتفاع ۳۰° ۲۸′ معلوم ہوا ؟

تیسرا سوال

ایک شی سطح افقی سے بلند ہے اور اس بلندی پر ایک اور شے اونچی واقع ہے اور وہان تک ہمارا گذر نہین ہوسکتا سطح افقی سے اوسکی بلندی دریافت کرو

فرض کرو کہ ا اور ب دو مقام اوس شے کے ساتھ سیدھ مین ہون اور اونمین جو فاصلہ باہم ہو وہ ناپا جائے اور اول مقام سے جو چوٹی کا زاویۂ ارتفاع پیمائش کیا جائے وہ = ا کے ہو اور دوسرے مقام سے چوٹی اور جڑ کے ارتفاع کے زاویے پیمائش کئے جائین برابر ب اور ی کے ہون سطح افقی سے ارتفاع ف س کا حساب



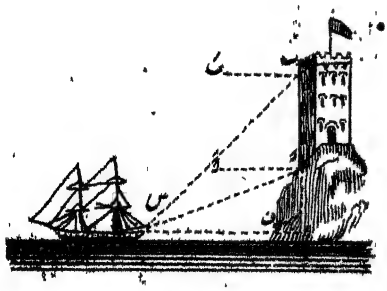
موافق سوال دوم کے ہوسکتا ہے اور دف برابر ہے ب ی × مس ی کے اور
دف س وہ بلندی ہے جسپر وہ شے مرتفع واقع ہے اگر دف کو ف س مین سے
نکال ڈالین تو باقی ا تفاع مطلوب ہوسکا رہے گا ؛

امثلۂ مشق ۲۲

(۱) ایک قلعہ پہاڑ پر واقع تہا سمندر مین وہ دو مقامون سے ایک سیدھ مین ایک شے
کے ساتہہ دکہائی دیا ان دونون مقامون مین فاصلہ ایک چوتہائی میل تہا
اور قلعہ کی چوٹی کا زاویۂ ارتفاع فاصلۂ بعید سے ۱۶° ۲۸′ ہے اور چوٹی اور
جڑ کے ارتفاع کے زاویے ۲° ۱۴′ اور ۸° ۳۸′ ہین تو بتاؤ اوسکا
ارتفاع کیا ہے اور سمندر سے وہ کتنا اونچا ہے ؛

(۲) مجہے ایک مکان کے دروازہ کا ارتفاع دریافت کرنا تہا اور مین وہان تک
جا نہین سکتا تہا مین نے اوسکے سامنے دو مقام جنمین ۵۴ فیٹ کا فاصلہ تہا تجویز
کئے مقام ابعد پر زاویۂ ارتفاع دروازہ کے سرون کا ۳۱° ۳۰′ تہا اور مقام
اقرب پر زاویۂ ارتفاع ۴۸° اور ۳۶° ۳۰′ تہا تو دروازہ کا ارتفاع اور اوسکی
بلندی زمین سے دریافت کرو ؛

چوتھا سوال



سطح افقی پر دو بلند مقامون سے ایک
شے کا مشاہدہ کیا گیا تو اوس شے کا فاصلہ
دریافت کرو ؛

فرض کرو کہ مقامات مشاہدہ کے ا اور ب
ایک خط راسی مین ہون اور اونکے درمیانکا
فاصلہ معلوم ہو اور ب ب اور ا ا

افقی خطوط ہین اور زاویے پستی ب ب ا اور ا ا س اوس شے کے مشاہدے کئے فاصلہ ف س کا حساب مثلث ا ب س سے ہوسکتا ہے اسواسطے کہ زاویے ف ب س اور ف ا س تمامیان زوایا پستی کی ہین اور اسیواسطے وہ معلوم ہین اور ضلع ا س کا حساب بموجب صورت اول مثلثات غیر قائم الزاویہ کے ہوسکتا ہے اگر زاویے پستی د اور د' ہون اور ارتفاع ا ب = ھ تو فاصلہ ف س کا اسطرح دریافت ہوسکتا ہے ؛

فاصلہ ف س = ھ × جم د جم د' / جب (د − د')

ارتفاع ا ف = ھ × جم د جب د' / جب (د − د')

امثلہ مشق ۲۳

(۱) ایک مکان کی ممٹی سے اور ایک دروازہ سے جو ۳۰ فیٹ نیچے ممٹی سے تھا میں نے زوایا پستی ایک شے کی ۱۵° ۴۰' اور ۱۰° دیکھے تو بتاؤ فاصلہ اوس شے کا کتنا ہے اور ارتفاع مکان کا کیا ہے ؛

(۲) ایک قلعہ ۶۸ فیٹ بلند ہے اوسکی منڈیر پر سے اور جڑ سے کسی شے کی زوایا پستی ۱۶° ۲۸' اور ۱۴° ۲۱' مشاہدہ مین آئی فاصلہ گزون مین دریافت کرو ؛

پانچوان سوال

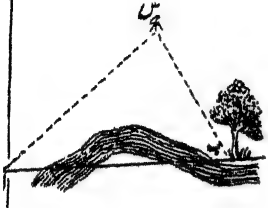
ایک شے کی پاس ہم نہین جاسکتے اوسکا فاصلہ سطح افقی پر دریافت کرو ؛

فرض کرو کہ س کوئی شے ہے اور ا کوئی مقام مشاہدہ کا ہے اور ایک فاصلہ ناپ کر دوسرا مقام ب مقرر کرو اور ان مقامون سے زاویون س ا ب اور س ب ا کی پیمائش کرو

تو بموجب صورت اول مثلث غیر قائم الزاویہ کے فاصلۂ اس کو دریافت کرسکتے ہین
اگر نقطۂ ب ایسا مقرر کیا جائے کہ زاویہ ا پر قائمہ ہو تو اس کا حساب بموجب صورت سوم
مثلثات قائم الزاویہ کے ہوسکتا ہے ؛

چھٹا سوال

سطح افقی پر دو اشیا کا فاصلہ دریافت کرو اور ہم
ایک شے سے دوسری شے کے پاس نہین جاسکتے ؛



فرض کرو کہ ا اور ب دو شے ہون کوئی مقام س کا
ایسا مقرر کرو جہان آسانی عمل مین ہو اور زاویۂ
اس ب کو ناپو اور فاصلے اس اور ب س بھی ناپ لو
تو بموجب صورت چہارم مثلثات غیر قائم الزاویہ کی اب کا حساب ہوسکتا ہے ؛

امثلۂ مشق ۲۵

(۱) اگر شکل مین فاصلے اس اور ب س ۳۰۰ اور ۴۵۰ گز ہون اور زاویہ س
۵۸° ۲۰′ ۳۰″ تو بتاؤ جھنڈی سے درخت کا فاصلہ کتنا ہوگا ؛

(۲) ایک قلعہ محصور ہے اوسمین دو چیزین ایک مقام پر دکھائی دین اور اونکے فاصلے
محاذی زاویہ ۴۹° ۲۵′ اوس مقام پر بنتا ہے اور اوس مقام سے جدا جدا فاصلے
اون اشیاء کے ۱۰۲۰ اور ۱۶۸۰ گز ہین تو بتاؤ اون اشیاء مین کیا فاصلہ ہے ؛

اگر فاصلہ اب کا حساب مثلثات غیر قائم الزاویہ کی صورت چہارم کے موافق کرین
تو ضرور ہے کہ اول زاویون س اب اور س ب ا کا حساب لگائین تو فاصلہ
حساب باستعانت ایسی صورت علم مثلثی کے ہوسکتا ہے کہ جنمین لوگارثم کی اعانت
سے آسانی ہو اور زاویون کا جھگڑا بھی بیچ مین نہ آئے
فرض کرو کہ اضلاع ب س اور س اور اب کے طا اور طب اور طس ہین او

زاویہ اس ب کا س ہے تو بموجب صورت علم مثلثی (۱) باب چہارم کے

طس^2 = طا^2 + طب^2 − ۲ طا طب جم س

جم س کی جگہ اوسکی قیمت ۲ جم^2 $\frac{1}{2}$ س − ۱ رکھو تو

طس^2 = طا^2 + طب^2 − ۲ طا طب (۲ جم^2 $\frac{1}{2}$ س − ۱)

طس^2 = (طا + طب)^2 − ۴ طا طب جم^2 $\frac{1}{2}$ س

طس^2 = (طا + طب)^2 (۱ − $\frac{\text{۴ طا طب جم}^2 \frac{1}{2} \text{ س}}{(\text{طا + طب})^2}$)

اگر ہم صہ ایسا زاویہ فرض کرین کہ

جم^2 صہ = $\frac{\text{۴ طا طب جم}^2 \frac{1}{2} \text{ س}}{(\text{طا + طب})^2}$

تو طس = (طا + طب) جیب صہ

اس صورت پر لوکارثم کا عمل بخوبی ہوتا ہے اور اس مساوات پر یہی کہ

جم^2 صہ = $\frac{\text{۴ طا طب جم}^2 \frac{1}{2} \text{ س}}{(\text{طا + طب})^2}$

اس سے زاویۂ مستعان کا حساب ہو سکتا ہے

امثلۂ مشق ۲۶

(۱) دو ٹیلونکے درمیان فاصلہ دریافت کرنا تہا مین نے ہر ایک کا فاصلہ ایک مقام سے ناپا تو وہ ۲ میل ۵۶۰ گز اور ۳ میل ۸۸ گز تہا اور اوس مقام پر زاویہ محاذی اُن دونوکے ۵۴° ۳۲′ ۴۰″ تہا بتاؤ اونکے درمیان کیا فاصلہ تہا ؛

(۲) دو مکان ایسے ہین کہ ایک مکان سے دوسرا مکان نہین دکہائی دیتا اور نہ ایک مکان سے دوسرے مکان تک رستہ جانے کا ہے مین نے اونکا فاصلہ ایک مقام سے پیمائش کیا اور وہانسے دونو مکان نظر آتے تہے ایک مکان کا فاصلہ ۱۹۰ر۳۰ جریب اور دوسرے مکان کا فاصلہ ۴۰۰ر۳۰ جریب ہے اور زاویہ جو اونکی باہمی فاصلہ کا محاذی ہے ۴۲° ۴۸′ کا ہے اونکے درمیانی فاصلہ گزون مین دریافت کرو ؛

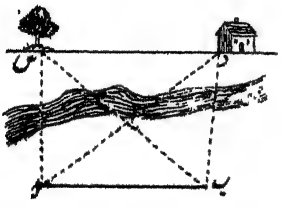
ضلع طس کا حساب اس صورت قانونی سے بھی ہو سکتا ہے کہ

طس² = (طا - طب)² + ۴ طا طب جب² ½ س

اور اس مین کچھ ضرورت زاویۂ مستعان کی نہین پڑتی اور لوکارثمون کا مجموعہ اور تفاوت جو لکھا ہے اوس سے حساب اونکا ہو سکتا ہے جدول لوکارثمی دیکھو

ساتوان سوال

دو مقامونکے درمیان فاصلۂ سطح افقی پر دریافت کرو اور اون دونون مقامون پر ہم نہین پہونچ سکتے - فرض کرو کہ س اور د دو چیزین ہون قاعدہ کا خط ا سے ب تک پیمائش کرو اور اوس کے انجامون



ا اور ب سے زاویۂ ب ا س اور ب ا د اور ا ب د اور ا ب س کو پیمائش کرو تو بموجب صورت اول مثلثات غیر قائم الزاویہ کے اضلاع ا س اور ا د کا حساب ہو سکتا ہے اور پھر اضلاع ا س اور ا د اور زاویۂ درمیانی س ا د سے س د کا حساب بموجب صورت چہارم مثلثات غیر قائم الزاویہ کے ہو سکتا ہے ؛ فاصلۂ مطلوب

امثلہ مشق ۲۷

(۱) فرض کرو کہ ا ب = ۱۰۰۰ اگز اور زاویئے ب ا س اور ب ا د = ۷۶° ۳۰′ اور ۴۴° ۱۰′ اور زاویئے ا ب د اور ا ب س = ۸۱° ۱۲′ اور ۴۶° ۵۰′ کی س اور د کی درمیان فاصلہ دریافت کرو

(۲) دشمن نے جو فصیل بنائی تھی اوسکے دو کنگورون کے درمیان فاصلہ دریافت کرنا تھا قاعدہ کا خط ۵۰۰ ناپا اور ہر کنگورہ جو قاعدہ کے ایک انجام پر زاویہ بناتا ہے ۱۸° ۲۰′ اور ۴۶° ۱۴′ تھا اور دوسرے انجام پر ۸۸° ۴۱′ اور ۳۳° ۱۲′ بناتا تھا تو بتاؤ اونکے درمیان کتنا فاصلہ تھا

آٹھوان سوال

دو چیزونکے درمیان فاصلہ معلوم ہے اور دو مقامون سے جو بہت فاصلہ پر ہے اون اشیا کا مشاہدہ کیا گیا تو اون مقامونکے مابین کا فاصلہ دریافت کرو۔

یہہ سوال پہلے سوال سے بالعکس ہے اور اس طرح حل ہوتا ہے ؛

فرض کرو کہ زاویئے ب ا س اور ب ا د اور ا ب د اور ا ب س مشاہدہ ہوکر پیمائش کئے گئے اور ا ب = ۱۰۰۰ تو موافق ساتوین سوال کے س ب د کا حساب کرو اور ا ب کا حساب اس تناسب سے کرو

س د (جسکا حساب کیا گیا ہے) : س د (معلوم) :: ۱۰۰۰ : ا ب مطلوب

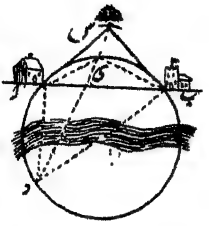
امثلہ مشق ۲۸

(۱) فرض کرو کہ س د ایک میل ہے اور زاویئے ب ا س اور ب ا د اور ا ب د اور ا ب س وہی ہین جو مثال اول سوال ہفتم مین تھے ا ب کا فاصلہ دریافت کرو

(۲) ساحل کی پیمائش مین سمندر کے اندر دو پہاڑون ا اور ب سے ایک روشنی گہر اور دوسرے ٹیلہ کا مشاہدہ کیا گیا اون دونون کے درمیان فاصلہ ۲۸۵ گز کا تھا اور آ پر روشنی گہر ۴۸° ۳۲′ اور ٹیلہ ۳۶° ۲۴′ کا زاویہ ہر ایک سے بناتا تھا اور ب پر ٹیلہ ۶۵° ۱۵′ کا اور روشنی ۴۸° ۴۲′ کا اسے زاویہ بناتا تھا پہاڑونکے درمیان فاصلہ اور زاویئے روشنی گہر اور ٹیلہ سے دریافت کرو ؛

نوان سوال

سطح افقی مین تین نقطون کے درمیانی فاصلے معلوم ہین اوسی سطح مین ایک چوتھے نقطے سے اونکے فاصلے دریافت کرو۔ فرض کرو کہ ا اور ب اور س تین نقطے ہین اور اونکے درمیانی فاصلے معلوم ہین اور د ایک نقطہ ہے جس سے زاویئے ا د س اور ب د س پیمائش کئے نقاط ا اور ب سے گذرتا ہوا دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ خط



س د کو نقطۂ ی پر تقاطع کرتا ہے اور خطوط
ا ی اور ب ی ملائے ہین اب چونکہ زاویئے
ب ا ی اور ا ب ی انہین قطعون مین
واقع ہین جنمین زاویئے پیمائش کئے گئے
ب د س اور ا د س واقع ہین اس
سبب سے وہ زاویے بہی معلوم ہین اور
اسیواسطے اضلاع ا ی اور ب ی کا بموجب صورت اول مثلثات غیر قائم الزاویہ کے
ہوسکتا ہے اور مثلث ا ب س کے زاویون کا حساب تین اضلاع معلوم سے بموجب
صورت پنجم مثلثات غیر قائم الزاویہ کے ہوسکتا ہے
زاویۂ ب ا س مین سے ب ا ی کو تفریق کرکے زاویۂ ی ا س دریافت کرسکتے ہین
اور مثلث ی ا س مین اضلاع ا س اور ا ی اور اونکا درمیانی زاویہ معلوم ہے
اسواسطے بموجب صورت چہارم مثلثات غیر قائم الزاویہ کے زاویۂ ا س ی کا
حساب لگاسکتے ہین اور اوسکو ا س ب مین سے تفریق کرکے زاویۂ ب س ی کو
دریافت کرسکتے ہین اس سے معلوم ہوا کہ یہ امر بدیہات سے ہے کہ دو مثلثون
ا د س اور ب د س کے تمام زاویون اور اضلاع ا س اور ب س کے معلوم ہونے
سے ہمکو بموجب صورت اول مثلثات غیر قائم الزاویہ کے اضلاع ا د اور ب د اور
س د یعنے ابعاد مطلوب دریافت ہوجائین

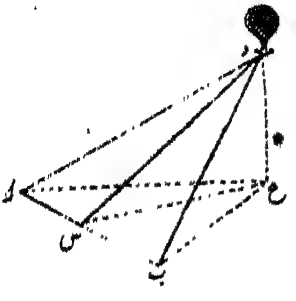
امثلۂ مشق ۲۹

(۱) فرض کرو کہ ابعاد ا ب اور ب س اور س ا ۴ میل اور ۳ میل اور ۵ میل
ہین اور زاویئے ا د س اور ب د س ۲۱° اور ۲۲° ۱۰′ ہین ابعاد ا د اور
د س دریافت کرسکتے ہین

(۲) ایک مثلث متساوی الاضلاع ہے اوسکا ہر ایک ضلع ۶ گز ہے اور اوس مثلث کے اندر مین کہڑا ہوا اور اضلاع مین سے ایک ضلع کے محاذی زاویہ ۸۸° ۳۰′ اور دوسرے ضلع کے محاذی ۱۴۰° ۲۰′ ہی پایا تو میرا فاصلہ مثلث کے زاویونسے کتنا کتنا ہے ÷

دسوان سوال

سطح افقی کے اوپر ایک شے کی بلندی دریافت کرو اور اوسکا مشاہدہ تین مقامون سے کیا گیا ہے اور یہ تینون مقام ایک خط مستقیم مین ہین ÷



فرض کرو کہ ا اور س اور ب ارتفاعی زاویے نقطہ د کے ہین جو نقاط ا اور س اور ب سے مشاہدہ کئے گئے اور یہ تینون نقطے ایک خط مستقیم مین ہین فرض کرو کہ فاصلے ب س اور س ا اور ا ب طا اور طب اور طس ہین اور ارتفاع مطلوب ع د = صہ پس مثلثات قائم الزاویہ ا ع د اور س ع د اور ب ع د ہین ÷

ا ع = صہ مم ا

س ع = صہ مم س

ب ع = صہ مم ب

اگر زاویہ ب س ع کو صہ سے تعبیر کرین تو

ا ع² = ا س² + س ع² + ۲ ا س × س ع جم صہ

ب ع² = ب س² + س ع² − ۲ ب س × س ع جم صہ

اگر ہم پہلی مساوات کو ب س مین ضرب دین اور دوسری کو ا س مین اور پہر اونہین جمع کرین تاکہ زاویہ صہ دور ہو جائے تو ہمکو یہ ارتباط حاصل ہوگا ÷

ب س × ا ع² + ا س × ب ع² = ب س × ا س² + ا س × ب س²

+ (ب س + ا س) س ع²

خطوط کی جگہہ اون کی قیمتون کے مندرج کرنے سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{حصہ}^2 = \frac{\text{طا طب طس}}{\text{طا جم ا - طس جم}^2\text{ س + طب جم}^2\text{ ب}}$$

اس سے ارتفاع حصہ دریافت ہوجائے گا

امثلہ مشق ۳۰

(۱) تین مشاہدہ کرنے والے ا اور س اور ب ایک ہی خط مستقیم مین کہڑے ہین اور فاصلے ا س = ۵۰۰ فیٹ اور ب س = ۱۳۰۰ فیٹ اور زاویے ارتفاعی ایک بیلون کی ایک ہی وقت مین یون مشاہدہ کئے گئے کہ

ا = ۵° ۲۰′

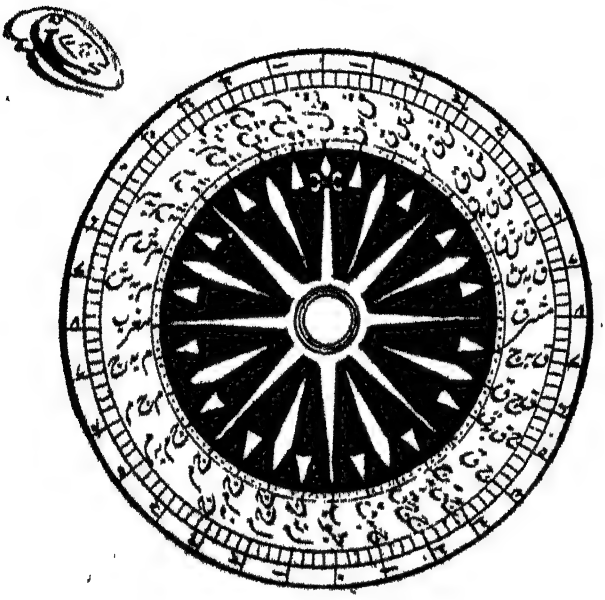
س = ۵۸° ۱۴′

ب = ۴۹° ۲۵′

تو بتاؤ بیلون زمین سے کتنا دور ہے

(۲) ایک تُکّل کی بلندی دریافت کرنے کے لئے تین مقامون پر نشان کئے گئے اور اونمین ایک دوسرے سے فاصلہ ۱۵۰ فیٹ کا تہا اور وہ ایک خط مستقیم مین تہے مگر یہ خط تکّل کی سمت مین نہ تہا مقام وسط سے اوسکا زاویۂ ارتفاعی ۵۳° ۸′ تہا اور اطراف کے مقام سے ارتفاع ۴۴° ۵۰′ اور ۴۸° ۲۱′ تہا تو اوسکا ارتفاع کیا ہوگا

جہازرانی اور سمندر کی پیمائشون مین نقاط کے مقام اور خطوط کی سمتین کمپاس کے نقاط سے بتلائے جاتے ہین اسلئے ہم کمپاس کی تصویر کاغذ پر بنائے دیتے ہین اوسکے دیکھنے سے صاف سمجھ مین آجائے گا کہ یہ اصطلاحات کیا ہین کہ شمال مشرق اور شمال شمال مشرق اور شمال مشرق اور شمال مشرق بجنوب وغیرہ ہا



ربعہ دائرہ آٹھہ برابر حصّون مین تقسیم ہوتا ہے اور ہر ایک حصہ کو نقطہ کہتے ہین اور پہر ان نقطونکے دو دو اور چار چار اور آٹھہ آٹھہ حصے کرتے ہین یہ ظاہر ہے کہ

ایک نقطہ = ۱۱° ۱۵′ ۰″

نصف نقطہ = ۵° ۳۷′ ۳۰″

ربعہ نقطہ = ۲° ۴۸′ ۴۵″

کپتان کے نقطونکو کبہی اسطرح بہی تعبیر کیا کرتے ہین کہ اتنے نقطے دائین یا بائین طرف شمال کے پس شمال مشرق بمشرق ۵ نقطے دائین طرف شمال کے کہلاتے ہین مغرب بشمال ۷ نقطے بائین طرف شمال کے اور علی ہذا القیاس اور جب نصف یا ربعہ نقطہ کا ذکر کیا جائے تو ۳½ نقطے دائین طرف شمال کے یعنے ۵ ۳/۴ بائین طرف شمال کے سمجہے جاتے ہین اور اونکو بتعبیر اسطرح کیا کرتے ہین شم مش بہ شم ½ مش اور مش مغ بہ مغ ¾ مغ اب یہ ظاہر ہے کہ یہ شم مش ½ شم اور مغ مش مغ ½ شم سے بہی بتعبیر ہو سکتی ہین

لوکارثم جیب اور مماس اور قاطع الزاویہ ہر ایک نقطہ اور ربعہ نقطہ کنپاس کی

درجہ	جیب	جیب التمام	مماس	مماس التمام	قاطع الزاویہ	قاطع التمام	درجہ
۰	۰٫۰۰۰۰۰	۱۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰	لانہایت	۱۰٫۰۰۰۰	لانہایت	۸
۷ ۳/۴	۸٫۶۹۰۸۰	۹٫۹۹۹۴۸	۸٫۶۹۱۳۲	۱۱٫۳۰۸۶۸	۱۰٫۰۰۰۵۲	۱۰٫۳۰۹۲۰	۷ ۳/۴
۷ ۱/۲	۸٫۹۹۱۳۰	۹٫۹۹۷۹۰	۸٫۹۹۳۴۰	۱۱٫۰۰۶۶۰	۱۰٫۰۰۲۱۰	۱۱٫۰۰۸۷۰	۷ ۱/۲
۷ ۱/۴	۹٫۱۶۶۵۲	۹٫۹۹۵۲۷	۹٫۱۷۱۲۵	۱۰٫۸۲۸۷۵	۱۰٫۰۰۴۷۳	۱۰٫۸۳۳۴۸	۷ ۱/۴
۷	۹٫۲۹۰۲۴	۹٫۹۹۱۰۷	۹٫۲۹۸۶۶	۱۰٫۷۰۱۳۴	۱۰٫۰۰۸۴۳	۱۰٫۷۰۹۷۶	۷
۶ ۳/۴	۹٫۳۸۵۵۷	۹٫۹۸۶۷۹	۹٫۳۹۸۷۸	۱۰٫۶۰۱۲۱	۱۰٫۰۱۳۲۱	۱۰٫۶۱۴۴۳	۶ ۳/۴
۶ ۱/۲	۹٫۴۶۲۸۲	۹٫۹۸۰۸۸	۹٫۴۸۱۹۴	۱۰٫۵۱۸۰۶	۱۰٫۰۱۹۱۱	۱۰٫۵۳۷۱۸	۶ ۱/۲
۶ ۱/۴	۹٫۵۲۷۴۹	۹٫۹۷۳۸۴	۹٫۵۵۳۶۵	۱۰٫۴۴۶۳۵	۱۰٫۰۲۶۱۶	۱۰٫۴۷۲۵۱	۶ ۱/۴
۶	۹٫۵۸۲۸۴	۹٫۹۶۵۶۱	۹٫۶۱۷۲۲	۱۰٫۳۸۲۷۸	۱۰٫۰۳۴۳۸	۱۰٫۴۱۷۱۶	۶
۵ ۳/۴	۹٫۶۳۰۹۹	۹٫۹۵۶۱۶	۹٫۶۷۴۸۳	۱۰٫۳۲۵۱۷	۱۰٫۰۴۳۸۴	۱۰٫۳۶۹۰۱	۵ ۳/۴
۵ ۱/۲	۹٫۶۷۳۳۹	۹٫۹۴۵۴۲	۹٫۷۲۷۹۶	۱۰٫۲۷۲۰۴	۱۰٫۰۵۴۵۷	۱۰٫۳۲۶۶۱	۵ ۱/۲
۵ ۱/۴	۹٫۷۱۱۰۵	۹٫۹۳۳۳۵	۹٫۷۷۷۷۰	۱۰٫۲۲۲۳۰	۱۰٫۰۶۶۶۵	۱۰٫۲۸۸۹۵	۵ ۱/۴
۵	۹٫۷۴۴۷۴	۹٫۹۱۹۸۶	۹٫۸۲۴۸۹	۱۰٫۱۷۵۱۱	۱۰٫۰۸۰۱۵	۱۰٫۲۵۵۲۶	۵
۴ ۳/۴	۹٫۷۷۵۰۳	۹٫۹۰۴۸۳	۹٫۸۷۰۲۰	۱۰٫۱۲۹۸۰	۱۰٫۰۹۵۱۷	۱۰٫۲۲۴۹۷	۴ ۳/۴
۴ ۱/۲	۹٫۸۰۲۳۶	۹٫۸۸۸۱۸	۹٫۹۱۴۱۷	۱۰٫۰۸۵۸۳	۱۰٫۱۱۱۸۱	۱۰٫۱۹۷۶۴	۴ ۱/۲
۴ ۱/۴	۹٫۸۲۷۰۸	۹٫۸۸۹۷۹	۹٫۹۵۷۲۹	۱۰٫۰۴۲۷۰	۱۰٫۱۳۰۳۱	۱۰٫۱۷۲۹۲	۴ ۱/۴
۴	۹٫۸۴۹۴۸	۹٫۸۴۹۴۸	۱۰٫۰۰۰۰۰	۱۰٫۰۰۰۰۰	۱۰٫۱۵۰۵۱	۱۰٫۱۵۰۵۱	۴
	جیب التمام	جیب	مماس التمام	مماس	جیب التمام	قاطع الزاویہ	

امثلہ متفرقہ

(۱) زاویہ نظری ایک آدمی کے قد کا ۱۰ ہے اگر یہ قد ۶ فیٹ ہو تو بتاؤ اوسکا فاصلہ کیا ہوگا

(۲) می کرومیٹر سے دشمن کے توپ خانہ مین ایک توپ کے پہیہ کا محاذی زاویہ ۱۲ ناپا گیا اور یہ معلوم ہے کہ قطر پہیہ کا ۵ فیٹ ہے تو توپ کا فاصلہ دریافت کرو +

(۳) ایک پر اسوارون کا آتا تھا می کرومیٹر سے دیکھا تو اونکے ارتفاع عمود کے محاذی زاویہ ۴ تھا اگر گھوڑے کے سوار سمیت ارتفاع ۸ فیٹ فرض کیا جائے تو اس پرہ کا فاصلہ کیا ہوگا +

(۴) ایک پہاڑ پر علم لگا ہوا ہے اوسکا محاذی زاویہ سمندر مین جہاز کے اندر ۳۸ کا ناپا گیا ہے اور زاویہ ارتفاع پہاڑ کا ۴ ہے پہاڑ سے فاصلہ جہاز کا اور بلندی پہاڑ کی دریافت کرو اور علم ۲۴ فیٹ بلند تھا +

(۵) ایک پہاڑ کی چوٹی پر کھڑے ہو کر مین نے دیکھا کہ ۲۲۰ فیٹ بلند مینار کا زاویہ نظری ۱۲ ہے اور زاویہ پستی اوسکی چوٹی کا ۲۰ ۱۲ ہے تو بتاؤ بلندی پہاڑ کی اور ارتفاع پہاڑ کا

(۶) ایک شخص تکل اوڑا رہا تھا اوسنے دیکھا کہ اوسکا زاویہ ارتفاعی ۴۴ ۱۵ ہے اور ڈور کا طول ۲۴۸ گز تھا تو ارتفاع تکل کا دریافت کرو اور ڈور ایک خط مستقیم تنی ہوئی فرض کی گئی ہے +

(۷) مینار چی اولپس کا ۴۹۰ فیٹ بلند ہے دور سے اوسی سطح پر جسپر وہ قائم ہے اوسکی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۱۲ ۴۹ تھا اوسکا بھی فاصلہ دریافت کرو +

(۸) ایک آدمی کا قد ایسا ہے کہ اوسکی آنکھ ۵ فیٹ زمین سے اونچی ہے تو بتاؤ ۶۰ فیٹ بلند مینار سے کتنا پرے ہٹے کہ زاویہ نظری مینار کا ۴۵ کا بنے +

افق سمندری کا فاصلہ میلون مین دریافت کرنا

فرض کرو کہ ھ فٹ ارتفاع آنکہ کا سمندر کے سطح سے اور آنکہہ سے سطح زمین کا جو مماس نکالا جاوے وہ ط ہو اور نق نصف قطر زمین کا ہو

لو^۲ + ط^۲ = (لو + ھ)^۲ = لو^۲ + ۲ لو ھ + ھ^۲

اگر ھ بمقابلہ لو کے نہایت خفیف ہو تو اوسکی مربع سی قطع نظر کرو اور اوسکو کالعدم سمجھو

ط^۲ = ۲ لو ھ

تفاوت ط کا فاصلہ افقی سے جو سطح زمین سے نا پایا جائے قابل لحاظ کی نہین ہوتا اگر ۲ نق کی جگہہ قطر زمین کے میل یعنے ۷۹۲۶ رکھین اور ھ کو ۵۲۸۰ پر میلون کی طرف تحویل کرنے کے لئے تقسیم کرین تو ہمکو یہ حاصل ہوگا +

(فاصلہ)^۲ = ۱٫۵ ھ

پس سطح سمندر پر فاصلہ افقی کے دریافت کرنے کا یہ قاعدہ مستنبط ہوا

قاعدہ

ارتفاع چشم کے فٹون پر نصف فٹ زیادہ کرو اور حاصل جمع کا جذر دریافت کرو تو حاصل فاصلہ میلون مین ہوگا

(۹) ارتفاع قلہ اٹنا کا ۱۰۶۰۰ فیٹ سطح سمندر سے ہے تو بتاؤ فاصلہ افق سمندر کا کیا ہے

(۱۰) ایک جہاز پر ۱۲۰ توپین لگ سکتی ہین اور اوسکا مستول ۲۲۱۰ فیٹ پانی سے اونچا ہے بحری میلون مین بتاؤ کتنا فاصلہ افق سے دکھائی دیگا +

(۱۱) ایک جگہہ کرا ۶۰۰ فیٹ اونچا ہے تو بتاؤ جہاز جب اوسپر سے دکھائی دے گا تو کنارہ سے کتنی دور جہاز ہوگا

پستی افق کا دریافت کرنا

آنکھ سے مماس سطح زمین کا اور خط افقی کھینچین تو جو زاویہ اون دو خطونکے درمیان واقع ہوگا اوسے پستی افق کہتے ہین ۔ اب یہ ظاہر ہے کہ یہ زاویہ برابر اوس زاویۂ مرکزی کے ہے جو محاذی ط کے مرکز پر واقع ہو یعنے فاصلۂ افق بحری کے ۔

پستی افق دقیقون مین = ۱٫۰۶ √ھ

ہوا محیط زمین کے سبب سے روشنی کا انحراف ہوتا ہے اس سبب سے پستی افق پستی مذکور سے کم ہوتی ہے قاعدہ ذیل کے موافق ہمیشہ عملیات مین پستی افق دریافت کیا کرتے ہین

قاعدہ

ارتفاع کے فٹون کا جذر برابر پستی افق کے دقیقون کے ہوتا ہے

(۱۲) ایک مستول ۸۰ فیٹ اونچا ہے پستی افق دریافت کرو

(۱۳) افق بحری کے میلون کا حساب پستی افق سی کہ دقیقون مین بیان کیا گیا ہی کرو

(۱۴) چوٹی ٹنی رف کی ۲۱۷۰ فٹ ہے پستی افق دریافت کرو اور افق محسوس کا بعد چوٹی سی معلوم کرو

(۱۵) ایک مکان سامنے دریا کے پار واقع تہا اور اوسکا ارتفاع دریافت کرنا منظور تہا مین نے قاعدہ کا خط ۵۰ فیٹ کا مکان کے ایک طرف مین ناپا اور اس قاعدہ کے انجامون پر زاویۂ ارتفاع مکان کے ۲۵° ۱۰′ اور ۳۶° ۱۴′ ناپے تو بتاؤ ارتفاع مکان کا کیا ہے اور قریب کے مقام سے فاصلہ اوسکا کیا ہے ۔

(۱۶) اگر ا اور س اور ب تین نقطے ایک خط مین برابر فاصلہ پر واقع ہون اگر فاصلے ا س اور س ب نقطۂ د کی محاذی زاویئے سہ اور صہ بنائین اور خط س د کا میلان ا ب کے ساتھ فر ہو تو زاویۂ فر کو سہ اور صہ کی رقمون مین بیان کرو

(۱۷) ایک احاطہ نصف دائرہ کی شکل کا ہے اور اوسکا قطر ۸۰ فیٹ ہے اوسکے محیط مین کھڑا ہوکر مین کیا دیکھتا ہون کہ دو دروازے جو احاطے کے اندر ہین زاویۂ نظری ۳۴° ۴۰′ کا بناتے ہین تو بتاؤ اونکے درمیان فاصلہ کیا ہے ۔

(۱۸) مین ایک عمارت کے سامنے کہڑا تہا اوسکے تین ستون جو ایک خط مستقیم مین ہین اور چالس چالیس کے فاصلہ پر ایک دوسرے سے واقع ہین اونکے محاذی زاویے ۳۱° ۱۰′ اور ۴۲° ۱۲′ کے واقع ہین تو بتاؤ ہر ستون سے کس فاصلہ پر مین کہڑا تہا

(۱۹) پلائی موتہہ کا فاصلہ لزرڈ سے ۵۴٫۴ میل ہے اور لزرد سے سٹارٹ پوئنٹ تک ۱۵٫۱۷ میل کا فاصلہ ہے اور سٹارٹ پوئنٹ سی پلائی موتہہ تک فاصلہ ۲۳٫۳۱ میل کا ہے اور اڈی سٹون لائٹ سے پلائی موتہہ کا مقام

	شم	۲۵′	۰۴′	مش
لزرد	جنو	۰۷′	۱۳′	مغ
سٹارٹ	شم	۸۳′	۵۲′	مش

ایڈی سٹون لائٹ اور پلائی اور لزرد اور سٹارٹ پوئنٹ کا فاصلہ دریافت کرو

(۲۰) سینٹ الیان ہیڈ ۱۸ بحری میل کے فاصلہ پر نیڈلس سے واقع ہے اور اوسسے مغ ¾ شم نیڈلس سے جنو مغ بہ مغ کی سمت مین جہاز ۳ گہنٹہ تک چلا تو مجکو سینٹ الیان کا ہیڈ شمال کو معلوم ہوا تو بتاؤ مین کس فاصلہ پر ہیڈ سے ہون اور کس رفتار سے مین نیڈلس سے چلا تہا +

(۲۱) سٹارٹ پوئنٹ نیڈلس سے ۸۰ بحری میل کے فاصلہ پر ہے اور مغ ½ شم کی سمت مین ہے اور راس لاہیگ فرانسیسی کنارہ پر ۶۰ بحری میل کے فاصلہ پر نیڈلس سے واقع ہی اور جنو مغ ½ جنو کی سمت مین تو بتاؤ راس لاہیگ سے کس سمت مین جہاز چلے کہ سٹارٹ پوئنٹ پر پہونچے +

(۲۲) راستہ کا طول کیا ہوگا +

(۲۳) فنکر کی روشنی گہر کا ائرش چینل مین مقام دریافت کرنیکے واسطے ویکس فورڈ کے کنارہ سے تین مقام اضافی دریافت کیے تو وہ کورن سور کے مقام پر ۸۲° ۲۷′

مغ شمال کا گرین ٹور کے مقام سے ۳۲° ۲۰' مغ شمال کا اور راس لیر کے مقام پر
۱۱° ۱۰' مغ شمال کا اور فاصلہ کارن سور اور راس لیر کے مقام مین ۱۰ سمندری میل ہے
اور گرینویر کے مقام کا فاصلہ باقی مقامون سے ۵ ½ میل ہے ان معلومات سے ٹسکر کا
فاصلہ تین مقامون سے دریافت کرو

(۲۴) دو لڑکے تکل اُڑا رہے تھے اونکے دلمین آیا کہ یہہ کسطرح معلوم کرین کہ تکل کتنے اوپر
زمین سے ہے اونمین سے ایک لڑکے کے پاس اصطرلاب ربعی تھا اوس سے اوسنے زاویہ تفاع ۲۲° ۱۲' ۱۲"
دریافت کیا اور جب وہ آگے ۴۰۰ فیٹ خط مستقیم مین تکل کے ساتھہ بڑھا اور زاویہ ارتفاع
ناپا تو ۴۸° ۲۲' تھا دوسرے کے پاس جدولون کی کتاب تھی اوسنے
ان معلومات سے بلندی کا حساب لگایا تو بتاؤ بلندی تکل کی کیا نکلی ہوگی ؛

(۲۵) شہاب ثاقب کا راستہ لندن اور ورسسٹر اور ڈبلن سے دیکھا گیا اور یہ تینون مقام
ایک خط مستقیم مین ہین اور راہ مین فاصلہ ۹۶ اور ۱۸۰ میل ہے جسوقت وہ
ٹوٹا تھا اوسکا ارتفاع لندن مین شمال کیطرف ۲۹° ۳۰' تھا اور ورسسٹر
مین ۳۵° ۲۰' اور ڈبلن مین ۴۰° ۴۴' تو بتاؤ وہ زمین سے کتنا بلند تھا

(۲۶) ایک جہاز کا مستول ۸۶ فیٹ بلند پانی سے تھا اور ایک اور جہاز کی پتوار کا پستی کا
زاویہ افق محسوس سے ۱۴° ۳۴' تھا تو بتاؤ جہاز کا فاصلہ کیا تھا اور پستی افق کو
محسوب نہ کرو ؛

(۲۷) پستی افق کو محسوب کرکے حساب کرو

(۲۸) کشتی ۵،۸ میل ایک بندرگاہ سے ہے اور مقام اوسکا ۲م ہے بندرگاہ
مین پہونچنے کے واسطے جنوبی ہوا کے سبب سے اوسکو درج بدلنے پڑے اول ق شرق
اور دوسرے م بہ ج تو بتاؤ اون ہفتون مین ہر ہفتہ مین وہ کسقدر میل چلی
اور کل کیا وقت صرف ہوا اور رفتار چلنے کی ۷ گانٹ تھی

سوالات متفرقہ

(۲۹) لنگر نما کا مقام دریافت کرنا تہا کنارہ پر دو مقام ا اور ب مقرر کیے اور اونمین فاصلہ ڈیڑہ میل کا رکہا آ پر جو زاویہ لنگر نما ب کے ساتہہ بناتا ہے ۵۴° ۳۲′ ہے اور ب پر جو زاویہ اکے ساتہہ وہ بناتا ہے ۳۹° ۱۵′ ہے تو بتاؤ آ اور ب سے لنگر نما کا فاصلہ گزون مین کتنا ہے

(۳۰) ایک ہوائی اور دوسرا دخانی جہاز ایک ہی بندرگاہ سے ساتہہ چلے دخانی جہاز ج ب م ½ م کی سمت مین ۱۰ ½ نوٹ کی رفتار سے چلا اور ہوائی جہاز ج ق ب ق کی سمت مین ۶ نوٹ فی گہنٹہ کی رفتار سے چلا تو بتاؤ ۲ ½ گہنٹہ عرصہ مین اونکے اندر کسقدر فاصلہ ہوگا اور مقام اضافی ہوائی جہاز کا بہ لحاظ دخانی جہاز کی کیا ہوگا ؛

(۳۱) دو پہاڑ ہین ایک ۳ میل اونچا دوسرا دو میل بلند تو بتاؤ سطح زمین پر کسقدر فاصلہ اونکے درمیان واقع ہو کہ چوٹی ایک پہاڑ کی دوسرے پہاڑ کی چوٹی پر سے دکہائی دے

(۳۲) ایک قلعہ سمندر مین ایک پہاڑ پر واقع ہے اوسکا ارتفاع ۵۸ فیٹ ہی اور اس قلعہ کی چوٹی اور جڑ سے ایک جہاز کی پتوار کے زوایائے پستی ۵° ۴۷′ اور ۵° ۰۸′ دکہائی دی تو بتاؤ جہاز کا فاصلہ کے گز تہا

(۳۳) ایک دریا کا عرض معلوم نہ تہا اوسکے دریافت کرنے کے واسطے کنارہ پر قاعدہ ۲۵۰ فیٹ کا پیمائش کیا اور اوسکے اطراف کے نام ا اور ب رکہے طرف ا پر مین نے پرزمٹک کمپاس سے دیکہا کہ زاویہ اضافی ب اور ایک درخت جو مقابل کے کنارہ پر واقع ہے ۴۴° ۰۴′ اور ۶۰° ۳۳′ ق بہ ش اور طرف ب پر آ اور درخت کے زاویے اضافی ۵۷° ۵۶′ اور ۲۸° ۰۴′ م بہ ش تو بتاؤ عرض دریا کا کیا ہے

(۳۴) مین ایک بلون پر سوار تہا اور بیرومیٹر سے اوسکا ارتفاع ۶۷۰۰ فیٹ مجہے دریافت ہوا اور مین نے سنٹ سینٹ پال کے گرجا کا سمتدری افق سے جو پستی کا زاویہ دریافت کیا وہ ۱۰° ۳۳′ تہا اگر بلون سیدہ عمود مین گرے تو بتاؤ وہ سینٹ پال سے کسقدر

(۳۵) دو پہاڑ ا اور ب ہین اونکے درمیان فاصلہ دریافت کرو مین نے ہر ایک پہاڑ سے دو چیزین س اور د کنارہ پر مشاہدہ کین اون چیزونکے مابین کا فاصلہ ۲½ میل کا اور کنپاس کے ہر ایک مقامات اضافی تھے

ا سے س کا ۱° ۳۰′ ق من ش اور ب سے د کا ۲° ۰۰′ ق من ش

" د کا ۲° ۰۰′ ق من ش " س کا ۱° ۳۰′ م من ش

" ب کا ۳° ۳۰′ ج من ق " ا کا ۷° ۳۰′ م بہ ش

(۳۶) ایک بندھی اور دو مقام ا اور ب ہین اور اونمین ۱۲۵۰ گز فاصلہ ہے اور ا ٹھیک جنوب کو بند کے ایک انجام سے اور ب اسیقدر فاصلہ پر دوسرے انجام سے مشرق کو واقع ہے اب اس بند کی حد کے محاذی مقام ا یا ب پر زاویہ ۱۵° کا بنتا ہے تو بتاؤ بند کے دونو سرونکے درمیان فاصلہ خط مستقیم مین کتنا ہے

(۳۷) کورک کے بندرگاہ کو چھوڑا تو راس قدیم کن سیل کا سمت ش بم ۳/۴ م دکھائی دیا ۸ نوٹ کی رفتار سے جہاز سوا گھنٹہ سمت بہ ج چلا تو پھر راس ش ش ق بہ ½ ق کی سمت مین دکھائی دیا تو بتاؤ جہاز کا فاصلہ راس سے کتنا ہے ؛

(۳۸) آب نائے ڈوورمین مشرق کو جہاز جاتا تھا اور جب مین نے ڈوور اور کیلاس کی لین مین تو دیکھا س ج ق ½ ق مین دکھائی دیا جب سمت مذکور مین ۱۰½ میل چلا تو کیلاس سمت ج م بہ م مین دکھائی دینے لگا تو بتاؤ ڈوور کا مقام اضافی کتنا ہے اور وہ کتنی دور ہے اور ڈوور اور کیلاس مین ۲۵ میل کا فاصلہ ہے

(۳۹) ایک مکان کی چھت ۴۰ فیٹ اونچی ہے مین نے جو ۱۸ فیٹ بلند برج کو دیکھا تو اوسکے محاذی زاویے ۲° ۳۰′ کا بنا تو بتاؤ افق پر فاصلہ برج کا کیا ہے ؛

(۴۰) ایک جنگی جہاز سے ۸ میل کے فاصلہ پر ایک بندرگاہ کا دہانہ ق ش ق کی سمت مین واقع تھا جنگی جہاز نے دیکھا کہ بندرگاہ سے سوداگرون کا ق ش ق کی سمت مین ۷ نوٹ فی

گھنٹہ کی رفتار سے چلا تو بتاؤ کس سمت مین جنگی جہاز چلے کہ ۲½ گھنٹہ مین سوداگرونکی جہاز کو پکڑلے اور کیا رفتار رکھے اور کتنے فاصلہ پر پکڑے گا

(۴۱) ایک متوازی اضلاع کا قطر ۷۵ فیٹ ہے اور اوسکی کسی ایک طرف سے جو خطوط مستقیم مقابل کے اضلاع کے نقطۂ وسط مین ملائے جائین اونسے وہ زاویے ۲۰° ۱۴′ اور ۲۵° ۳۸′ بناتا ہے تو اضلاع کا طول اور دوسرے قطر کا طول دریافت کرو ؛

(۴۲) فرض کرو کہ ایک پہاڑ کی چوٹی آ ہے اور اوسکی جڑ ب ہے اور پہاڑ کا حصہ پائین ایک سطح مستوی ۵ء۸۴۰ گز لنبا: افق پر ۱۲° ۱۰′ مائل ہے اور پہاڑ کی چوٹی کا زاویۂ ارتفاع مقام ب ء سے ۳۳° ۲۰′ ہے اور س پر ۵۲° ۱۲′ تو ا کا ارتفاع سطح افق سے فٹون مین دریافت کرو اور یہ سطح افق ب پر سے کھینچے جائین ؛

(۴۳) دو چھڑیان برابر ارتفاع کی ہین اونکی جڑون کی سیدھ مین نزدیک کی چھڑیکا زاویہ ارتفاع ۶۰° کا مشاہدہ کیا اور اس سیدھ سے وہ ایک سمت مین جو پہلی سیدھ سے زاویۂ قائمہ بناتے تھے ۸۰ فیٹ چلا تو زاویے ارتفاعی دونو چھڑیون کے ۴۵° و ۳۰° دکھائی دیئے تو اونکا ارتفاع اور فاصلۂ درمیانی بتاؤ ؛

(۴۴) دوپہر کو ایک مستول کا سایہ دیکھنے سے ق ج ق کی سمت مین پڑتا تھا اور اوسکا ایک سرا ش یہ ق مین تھا اور زاویۂ ارتفاع ستون ۴۵° تھا اور طول سایہ کا ۸۰ فیٹ ستون کا ارتفاع دریافت کرو

(۴۵) ایک جہاز زمین سے روشنی کی سمت ش ش ق مین دکھائی دیا اور ق ب ج مین ۲ میل چلے تو روشنی گھر ش م ب ش مین دکھائی دیا تو روشنی کا فاصلہ جہاز کے اول اور آخر مقام سے جہاز کے دریافت کرو

(۴۶) ایک مثلث متساوی الساقین کا زاویۂ راس ۲۰° کا ہے اور قاعدہ کے ہر خامون ا اور ب سے خطوط مقابل کے اضلاع تک کھینچے گئے ہین اور م اور ن پر ملتے ہین اور زاویے ۵۰° اور ۶۰° فٹ کے قاعدہ کے ساتھ بناتے ہین تو خط ن م کا میلان

جواب

جواب مثالون کے

جواب مثلہ (۱)

(۱) ۰٫۱۷۱۴۲ (۲) ۱۹۸٫۱۷ فیٹ (۳) ۱۲۱ فٹ

جواب مثلہ ۲

(۱) ۱٫۴۷۱۹ (۲) ۰٫۳۱۴۱۶ (۳) ۴۲° ۵۸′ ۱۸٫۰۵″

(۴) ۱۴° ۴۰′ ۳٫۸۴″ (۵) ۵۷° ۱۷′ ۴۵″ (۶) ۰٫۷۸۵۳۹

(۷) ۵° ۰۹′ ۲۳٫۸۵″ (۸) ۵۹۴۹٫۹۵۲ فیٹ (۹) ۱° ۱۴′ ۳۹٫۶″

(۱۰) ۲۱۵۰٫۹۸ میل (۱۱) ۹ کروڑ ۵۰ لاکھ ۵۰ ہزار کے قریب

جواب مثلہ ۳

(۱) ۰٫۹۰۷ (۲) ۰٫۸۱۹ (۳) ۰٫۸۳۲ (۴) ۱٫۳۹۶

(۵) ۰٫۶۲۰ (۶) ۰٫۵۱۴ (۷) ۰٫۴۹۳ (۸) ۱٫۰۲۰

(۹) ۰٫۹۹۸ (۱۰) ۱٫۰۱۹ (۱۱) ۰٫۵۱۵ (۱۲) ۰٫۶۶۱

جواب مثلہ ۴

(۱) طس = ۵۰۳٫۹۱ (۲) طس = ۳۷۷٫۴۸۶ (۳) طس = ۲۸۰٫۵۵۸

ل = ۸° ل = ۲۲° ل = ۲۷°

ب = ۸۲° ب = ۶۸° ب = ۶۳°

جواب مثلہ ۵

(۱) طب = ۱۴٫۰۹۵ (۲) طب = ۲۱۴٫۲۹ (۳) طب = ۱۰۲٫۸۶

ل = ۲۰° ل = ۳۱° ل = ۵۴°

ب = ۷۰° ب = ۵۹° ب = ۳۶°

جواب مثلہ ۶

جواب

(۱) ب = ۶۷° (۲) ل = ۳۰° (۳) ل = ۳۳°

طب = ۴۰۵٫۲۰۶ طب = ۵۴۵٫۶ طب = ۳٫۳۳۵۷

طس = ۴۴۰٫۲۰ طس = ۶۳۰ طس = ۳۸۵۵٫۷۶

جواب امثلہ ۷

(۱) ب = ۵۵° (۲) ل = ۴۶° (۳) ب = ۶۱°

طا = ۱۳۷٫۶۶ طا = ۴۱۳٫۶۲ طا = ۳٫۳۹۳۷

طب = ۱۹۶٫۶۹ طب = ۳۹۹٫۴۳ طب = ۶٫۱۲۲۳

جواب امثلہ ۸

(۱) ل = ۳۶° ۵۲′ ۱۱″ (۲) ل = ۶۸° ۲۱′ ۱۱″ (۳) ل = ۶° ۴۱′ ۵۰″

ب = ۵۳° ۷′ ۴۹″ ب = ۳۱° ۳۸′ ۴۹″ ب = ۸۳° ۴۵′ ۱۰″

طس = ۵ طس = ۱۸۹۳۵۵۴ گز طس = ۱۳۲۷۵۹ فٹ

(۴) ل = ۴۳° ۷′ ۱۳″ (۵) ل = ۶۰° ۲۳′ ۴۴″

ب = ۴۶° ۵۲′ ۴۷″ ب = ۲۹° ۳۶′ ۱۶″

طس = ۱۹۶۱٫۹ طس = ۲۰۲۴٫۲۵

جواب امثلہ ۹

(۱) ل = ۳۰° ۳۳′ ۳۶″ (۲) ل = ۱۹° ۵۲′ ۴۶″ (۳) ل = ۵۱° ۳۴′ ۳۵″

ب = ۵۹° ۲۶′ ۲۴″ ب = ۷۰° ۴۰′ ۱۴″ ب = ۳۸° ۲۰′ ۲۵″

طب = ۹۷٫۵۷

(۴) ل = ۳۰° ۵۲′ ۸″ (۵) ل = ۴۳° ۳۳′ ۰″

ب = ۴۹° ۱۰′ ۵۲″ ب = ۶۶° ۲۶′ ۵۸″

طس = ۴۹٫۵۷۸۶

جواب امثلہ ۱۰

(۱) ب = ۵۴° ۵۸′ (۲) ل = ۳۱° ۵۶′ ۳۳″ (۳) ل = ۵۴°

طب = ۱۸٫۵۴۳ طب = ۱۸۵۵٫۷ طب = ۵۹۹٫۳۹

طس = ۲۲٫۵۶۴۶ طس = ۲۱۸۶٫۸ طس = ۱۰۱۹٫۵۷

(۴) ب = ۵۸° ۳۸′ ۵۴″ (۵) ا = ۸۰°

طا = ۴۶۶٫۸۵ طا = ۹۹۷٫۱

طب = ۷۶۶٫۲۸ طب = ۱۷۵٫۹

امثلۂ مشق ۱۲

(۱) ۷۴۰٫۸۶۱۵۵ مربع فیٹ (۲) ۲۵۰۳۳۶٫۳۵۳۳ مربع فیٹ (۳) ۰٫۴۷۵۲۳ مربع میل

امثلۂ مشق ۱۳

(۱) ۵۶۰۰٫۹ (۲) ۴۵۹۷۰ (۳) ۱٫۳۳۵ (۴) ۴۷۲۵ (۵) ۴۰۳۳۵

امثلۂ مشق ۱۴

(۱) ۷۷٫۲۷۱ (۲) ۶۹۹٫۹۶ (۳) ۶۹۲٫۳۸۷

امثلۂ مشق ۱۵

(۱) ۱۴۳۵۸ (۲) ۱۳٫۷۱۰ (۳) ۱۲۰۹۰۸۳ (۴) ۰٫۰۳۸۶۷ (۵) ۱۵۰۷۶۹

امثلۂ مشق ۱۶

(۱) ا = ۶۵° ۰۴′ (۲) ا = ۲۶° ۰۴′ ۱۰″ (۳) ا = ۱۰° ۱۸′ ۳۸″

طب = ۱۱٫۲۶۱ طب = ۳۷۵۰٫۶ طب = ۲۶۶۵

طس = ۱۵٫۵۰۱ طس = ۳۸۸۸ طس = ۲۳۷۵

(۴) ا = ۲۲° ۵۲′ ۴۵″ (۵) ا = ۲۱° ۰۶′ ۲۵″

طب = ۲۲۲۱٫۸ طب = ۶۸٫۱۶

طس = ۱۵۳۳٫۱ طس = ۴۳٫۰۱۷

امثلۂ مشق ۱۷

(۱) ب = ۴۲° ۲۲′ ۴۹″ (۲) ب = ۲۹° ۴۸′ ۴۱″ (۳) ب = ۱۰۴° ۵۳′ ۳۴″

س = ۱۰° ۵۴′ ۴۱″ س = ۲۵° ۳۹′ ۱۹″ س = ۱۲ ۴۲′ ۰۶″

طس = ۷۷٫۲۰۸ طس = ۲۷۱٫۱۷۱ طس = ۴۹٫۳۷

(۴) ب = ۲۷° ۵۹′ ۴۳″ (۵) ب = ۹۰

س = ۴۴° ۵۷′ ۴۰″ س = ۱۵° ۴۱′

طس = ۵۷ ر ۳۶۳ طس = ۴۶ ر ۷۸

جواب امثلہ ۱۸

(۱) ا = ۵۹° ۳۷′ ۱۹″ (۲) ا = ۳۴° ۰۸′ ۵۳″ (۳) ا = ۱۳۷° ۴۵′ ۰۳″

ب = ۲۱° ۲۸′ ۴۱″ ب = ۱۹° ۰۵′ ۰۱″ ب = ۲۵° ۳۷′ ۱۷″

طس = ۹۲ ر ۵۹۰ طس = ۱۴ ر ۷۶ طس = ۶ ر ۳۵۱

(۴) ا = ۹۱° ۰۵′ ۵۸″ (۵) ا = ۱۱۹° ۳۴′ ۵۸″

ب = ۲۷° ۰۱′ ۰۲″ ب = ۳۸° ۱۱ ۳۲″

طس = ۶ ۴ ۲۷ طس = ۴۷ ر ۷۵

جواب امثلہ ۱۹

(۱) ا = ۴۵° ۰۹′ ۱۷″ (۲) ا = ۱۱۸° ۵۵′ ۵۲″ (۳) ا = ۴° ۵۴′ ۴۰″

ب = ۸۶° ۱۱′ ۵۵″ ب = ۱۴° ۳۲′ ۳۱″ ب = ۵۹° ۴۰′ ۴۳″

س = ۸° ۳۸′ ۵۳″ س = ۱۹° ۳۱′ ۳۶″ س = ۵° ۳۳′ ۳۴″

(۴) ا = ۸° ۴۶′ ۴۴″ (۵) ا = ۴۹° ۱۴′ ۵۵″

ب = ۶۹° ۵۳′ ۱۶″ ب = ۱۱۶° ۰۷′ ۲۹″

س = ۳۴° ۲۰ ۱۷″ س = ۱۴° ۳۷′ ۳۵″

جواب امثلہ ۲۰

(۱) ۸ ر ۱۶۸ فٹ (۲) ۱۲ ر ۵۴ فیٹ

جواب امثلہ ۲۱

(۱) ۴۵ ر ۲۲۰ (۲) ۶ ر ۴۸۸ فیٹ

جواب

جواب امثلہ ۲۲

(۱) ارتفاع = ۶۰۶۲ (۲) ارتفاع کہر کی = ۲۴ر۶۳۹ فٹ

سمندر پر ارتفاع = ۴۴۵ر۲۳ ف ارتفاع زمین پر = ۴۹ر۱۹۷ فٹ

جواب امثلہ ۲۳

(۱) ارتفاع = ۲۸۸ر۱ فیٹ (۲) فاصلہ = ۵۷۰ر۲ گز

ارتفاع مکان = ۸۰ر۸ فیٹ

جواب امثلہ ۲۴

(۱) ۲۷۵ر۶ گز (۲) ۴۸۰ قدم

جواب امثلہ ۲۵

(۱) ۳۸۸ر۳ گز (۲) ۱۲۷۸ گز

جواب امثلہ ۲۶

(۱) ۲ میل ۹۵۸ گز (۲) ۶۶۸ گز

جواب امثلہ ۲۷

(۱) ۶۶۹ر۸ گز (۲) ۶۰۶۱ر۹ گز

جواب امثلہ ۲۸

(۱) ۱ر۴۹۳ میل (۲) فاصلہ = ۴۴۰۳ گز

روشنی گھر ا س ۱۰۶ ۳۳ ۰ اور ب ۳۳ ۴۷ روشنی گھر سے

نیلہ سے ب ۱۰۹ ۴۰ اور ا ۳۱ ۴۶

جواب امثلہ ۲۹

(۱) د ا = ۲۰۴۵۶ (۲) ۴۳۸۶ گز

د ب = ۵۰۴۲۱ ۴۲ر۱۱

د س = ۷۰۲۱۵ ۲۱ر۲۳

جواب امثلہ ۳۰

(۱) ۱۷۴۲ر۶ فیٹ (۲) ۳۶۶ر۷

جواب سوالات متفرقہ

(۱) ۲۰۶۲٫۶۵ فیٹ (۲) ۱۴۳۲ فیٹ (۳) ۳٫۱ میل

(۴) فاصلہ = ۲۰۳۸ فیٹ (۵) فاصلہ = ۹۹۷۷ فیٹ

ارتفاع = ۵۰۸ فیٹ ارتفاع = ۲۴۰۱ فیٹ

(۶) ۱۸۷۴ فیٹ (۷) ۱۹۹۲۴ فیٹ (۸) ۶۴۲۸ فیٹ (۹) ۱۲۶ میل

(۱۰) ۱۵٫۳۲ میل (۱۱) ۳۰ میل (۱۲) ۹٫۸

(۱۳) میلون مین فاصلہ = ۱٫۱۵ × پستی افق کے دقیقون مین

(۱۴) پستی افق = ۵۷ فاصلہ ۱۳۵ میل

(۱۵) ارتفاع ۶۵٫۴۷ فیٹ فاصلہ ۹٫۳۵ میل فیٹ

(۱۶) مم شہ = $\frac{\text{جب (سہ − صہ)}}{\text{جب سہ − جب صہ}}$ (۱۷) ۴۵٫۵۰۴ فیٹ

(۱۸) مینار وسط سے فاصلہ = ۵۳۱۴ فیٹ

آخر پہاڑ سے فاصلہ = ۵۷۴۱ فیٹ اور ۴۷۵۲ فیٹ

(۱۹) ۱۳٫۱۰ میل ۴۴٫۴۲ میل اور ۲۷٫۲۲ میل

(۲۰) فاصلہ = ۱۴٫۵ میل رفتار = ۷ نوٹ

(۲۱) شمال مغرب ¾ تشم (۲۲) ۶۸٫۳ میل

(۲۳) کورن سور پوئنٹ سے ۱۶٫۷ میل گری نور سے ۴۷٫۳ میل روس لر پوئنٹ سی ۹٫۶۴ میل

(۲۴) ۲۵۷٫۱۶ فیٹ (۲۵) ۱۸۲٫۹ میل ارتفاع ایڈن برا ایٹن

(۲۶) ۳۳۰٫۹ فیٹ (۲۷) ۳۲۷٫۴ فیٹ

(۲۸) اول رستہ ۴٫۹۲ میل دوسرا رستہ ۶٫۸۴ میل وقت = ۱ گھنٹہ ۴۱ منٹ

(۲۹) ا سے = ۱۶۷۴ گز ب سے = ۲۱۵۵ گز

جواب

(۳۰) فاصلہ ۲۵٫۴۷ میل مقام شم مش ۱/۴ مش (۳۱) ۲۲۰ میل

(۳۲) ۱۶۸۸٫۷ گز (۳۳) ۲۲۰ فیٹ (۳۴) ۶٫۰۱۳ میل

(۳۵) ۳٫۷۶ میل (۳۶) ۳۵۵ گز (۳۷) ۱۳٫۹۸۹ میل

(۳۸) مقام صحیح ۶۴° ۲۹′ مغ شم کا فاصلہ ۲۷٫۸ میل (۳۹) ۲۶۸٫۶ فیٹ

(۴۰) رستہ مش بہ جنوب ۱/۲ جنوب رفتار = ۹ نوٹ فاصلہ = ۲۲٫۹ میل

(۴۱) ۷۰٫۲۳ فیٹ ۵۲٫۱۲ فیٹ اور ۹٫۳۳ فیٹ

(۴۲) ۲۹۸۱٫۶ فیٹ (۴۳) ارتفاع ۹۷٫۹۹ فیٹ فاصلہ ۲۰۶٫۲۵

(۴۴) ۲۳٫۱۱ فیٹ (۴۵) ۵٫۹۰۳ میل ۲۰۷٫۸ میل (۴۶) ۳۰°

	جیب	مماس	
۰°	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰	۹۰°
۱°	۰٫۰۱۷۴۵	۰٫۰۱۷۴۵	۸۹°
۲°	۰٫۰۳۴۹۰	۰٫۰۳۴۹۲	۸۸°
۳°	۰٫۰۵۲۳۳	۰٫۰۵۲۴۱	۸۷°
۴°	۰٫۰۶۹۷۵	۰٫۰۶۹۹۲	۸۶°
۵°	۰٫۰۸۷۱۵	۰٫۰۸۷۴۹	۸۵°
۶°	۰٫۱۰۴۵۳	۰٫۱۰۵۱۰	۸۴°
۷°	۰٫۱۲۱۸۷	۰٫۱۲۲۷۸	۸۳°
۸°	۰٫۱۳۹۱۷	۰٫۱۴۰۵۴	۸۲°
۹°	۰٫۱۵۶۴۳	۰٫۱۵۸۳۸	۸۱°
۱۰°	۰٫۱۷۳۶۵	۰٫۱۷۶۳۲	۸۰°
۱۱°	۰٫۱۹۰۸۱	۰٫۱۹۴۳۸	۷۹°
۱۲°	۰٫۲۰۷۹۱	۰٫۲۱۲۵۵	۷۸°
۱۳°	۰٫۲۲۴۹۵	۰٫۲۳۰۸۷	۷۷°
۱۴°	۰٫۲۴۱۹۲	۰٫۲۴۹۳۳	۷۶°
۱۵°	۰٫۲۵۸۸۲	۰٫۲۶۷۹۵	۷۵°
۱۶°	۰٫۲۷۵۶۳	۰٫۲۸۶۷۴	۷۴°
۱۷°	۰٫۲۹۲۳۷	۰٫۳۰۵۷۳	۷۳°
۱۸°	۰٫۳۰۹۰۱	۰٫۳۲۴۹۲	۷۲°
۱۹°	۰٫۳۲۵۵۷	۰٫۳۴۴۳۲	۷۱°
۲۰°	۰٫۳۴۲۰۲	۰٫۳۳۳۹۷	۷۰°
۲۱°	۰٫۳۵۸۳۷	۰٫۳۸۳۸۶	۶۹°
۲۲°	۰٫۳۷۴۶۰	۰٫۴۰۴۰۲	۶۸°
۲۳°	۰٫۳۹۰۷۳	۰٫۴۲۴۴۷	۶۷°
۲۴°	۰٫۴۰۶۷۳	۰٫۴۴۵۲۳	۶۶°
۲۵°	۰٫۴۲۲۶۲	۰٫۴۶۶۳۱	۶۵°
	جیب التمام	مماس التمام	

	جیب		مماس	
۲۵°	۰٫۴۲۲۶۲		۰٫۴۶۶۳۱	۶۵°
۲۶°	۰٫۴۳۸۳۷		۰٫۴۸۷۷۳	۶۴°
۲۷°	۰٫۴۵۳۹۹		۰٫۵۰۹۵۲	۶۳°
۲۸°	۰٫۴۶۹۴۷		۰٫۵۳۱۷۱	۶۲°
۲۹°	۰٫۴۸۴۸۱		۰٫۵۵۴۳۱	۶۱°
۳۰°	۰٫۵۰۰۰۰		۰٫۵۷۷۳۵	۶۰°
۳۱°	۰٫۵۱۵۰۴		۰٫۶۰۰۸۶	۵۹°
۳۲°	۰٫۵۲۹۹۲		۰٫۶۲۴۸۷	۵۸°
۳۳°	۰٫۵۴۴۶۴		۰٫۶۴۹۴۱	۵۷°
۳۴°	۰٫۵۵۹۱۹		۰٫۶۷۴۵۱	۵۶°
۳۵°	۰٫۵۷۳۵۷		۰٫۷۰۰۲۱	۵۵°
۳۶°	۰٫۵۸۷۷۸		۰٫۷۲۶۵۴	۵۴°
۳۷°	۰٫۶۰۱۸۱		۰٫۷۵۳۳۵	۵۳°
۳۸°	۰٫۶۱۵۶۶		۰٫۷۸۱۲۸	۵۲°
۳۹°	۰٫۶۲۹۳۲		۰٫۸۰۹۷۸	۵۱°
۴۰°	۰٫۶۴۲۷۹		۰٫۸۳۹۱۰	۵۰°
۴۱°	۰٫۶۵۶۰۶		۰٫۸۶۹۲۸	۴۹°
۴۲°	۰٫۶۶۹۱۳		۰٫۹۰۰۳۰	۴۸°
۴۳°	۰٫۶۸۲۰۰		۰٫۹۳۲۵۱	۴۷°
۴۴°	۰٫۶۹۴۶۶		۰٫۹۶۵۶۹	۴۶°
۴۵°	۰٫۷۰۷۱۰		۱٫۰۰۰۰۰	۴۵°
۴۶°	۰٫۷۱۹۳۴		۱٫۰۳۵۵۳	۴۴°
۴۷°	۰٫۷۳۱۳۵		۱٫۰۷۲۳۷	۴۳°
۴۸°	۰٫۷۴۳۱۴		۱٫۱۱۰۶۱	۴۲°
۴۹°	۰٫۷۵۴۷۱		۱٫۱۵۰۵۷	۴۱°
۵۰°	۰٫۷۶۶۰۴		۱٫۱۹۱۷۵	۴۰°
	جیب التمام		مماس التمام	

	جیب		مماس	
۵۰°	۰٫۷۶۶۰۴		۱٫۱۹۱۷۵	۴۰°
۵۱°	۰٫۷۷۷۱۴		۱٫۲۳۴۱۹	۳۹°
۵۲°	۰٫۷۸۸۰۱		۱٫۲۷۹۹۴	۳۸°
۵۳°	۰٫۷۹۸۶۳		۱٫۳۲۷۰۴	۳۷°
۵۴°	۰٫۸۰۹۰۱		۱٫۳۷۶۳۸	۳۶°
۵۵°	۰٫۸۱۹۱۵		۱٫۴۲۸۱۵	۳۵°
۵۶°	۰٫۸۲۹۰۴		۱٫۴۸۲۵۶	۳۴°
۵۷°	۰٫۸۳۸۶۷		۱٫۵۳۹۸۶	۳۳°
۵۸°	۰٫۸۴۸۰۵		۱٫۶۰۰۳۳	۳۲°
۵۹°	۰٫۸۵۷۱۶		۱٫۶۶۴۶۸	۳۱°
۶۰°	۰٫۸۶۶۰۲		۱٫۷۳۲۰۵	۳۰°
۶۱°	۰٫۸۷۴۶۲		۱٫۸۰۴۰۵	۲۹°
۶۲°	۰٫۸۸۲۹۵		۱٫۸۸۰۷۲	۲۸°
۶۳°	۰٫۸۹۱۰۰		۱٫۹۶۲۶۱	۲۷°
۶۴°	۰٫۸۹۸۷۹		۲٫۰۵۰۳۰	۲۶°
۶۵°	۰٫۹۰۶۳۱		۲٫۱۴۴۵۰	۲۵°
۶۶°	۰٫۹۱۳۵۴		۲٫۲۴۶۰۳	۲۴°
۶۷°	۰٫۹۲۰۵۰		۲٫۳۵۰۵۸۵	۲۳°
۶۸°	۰٫۹۲۷۱۸		۲٫۴۷۵۰۸	۲۲°
۶۹°	۰٫۹۳۳۵۸		۲٫۶۰۵۰۹	۲۱°
۷۰°	۰٫۹۳۹۶۰		۲٫۷۴۷۴۷	۲۰°
۷۱°	۰٫۹۴۵۵۴		۲٫۹۰۴۲۱	۱۹°
۷۲°	۰٫۹۵۱۰۵		۳٫۰۷۷۶۸	۱۸°
۷۳°	۰٫۹۵۶۳۰		۳٫۲۷۰۸۵	۱۷°
۷۴°	۰٫۹۶۱۲۶		۳٫۴۸۷۴۱	۱۶°
۷۵°	۰٫۹۶۵۹۲		۳٫۷۳۲۰۵	۱۵°
	جیب التمام		مماس التمام	

جدولیں جیبوں اور مماسوں کی

	جیب		مماس	
۷۵°	۰٫۹۶۵۹۲		۳٫۷۳۲۰۵	۷۵°
۷۶°	۰٫۹۷۰۲۹		۳٫۰۱۰۷۸	۷۴°
۷۷°	۰٫۹۷۴۳۷		۴٫۳۳۱۴۷	۷۳°
۷۸°	۰٫۹۷۸۱۵		۴٫۷۰۴۶۳	۷۲°
۷۹°	۰٫۹۸۱۶۲		۵٫۱۴۴۵۵	۷۱°
۸۰°	۰٫۹۸۴۸۱		۵٫۶۷۱۲۸	۷۰°
۸۱°	۰٫۹۸۷۶۹		۶٫۳۱۳۷۵	۹°
۸۲°	۰٫۹۹۰۲۷		۷٫۱۱۵۳۷	۸°
۸۳°	۰٫۹۹۲۵۴		۸٫۱۴۴۳۴	۷°
۸۴°	۰٫۹۹۴۵۲		۹٫۵۱۴۳۶	۶°
۸۵°	۰٫۹۹۶۱۹		۱۱٫۴۳۰۰۵	۵°
۸۶°	۰٫۹۹۷۵۶		۱۴٫۳۰۰۶۶	۴°
۸۷°	۰٫۹۹۸۶۳		۱۹٫۰۸۱۱۳	۳°
۸۸°	۰٫۹۹۹۳۹		۲۸٫۶۳۶۲۵	۲°
۸۹°	۰٫۹۹۹۸۵		۵۷٫۲۸۹۹۶	۱°
۹۰°	۱٫۰۰۰۰۰		لا انتہا	۰°
	جیب التمام		مماس التمام	

ہذا الکتاب از ملک سید محمد قادری بتاریخ بست و ششم ربیع الثانی ۱۲۸۵ھ خریدہ شد

بقلم محمد محمود حسن بتاریخ ۲۳ ماہ ستمبر ۱۸۷۱ء باختتام رسید